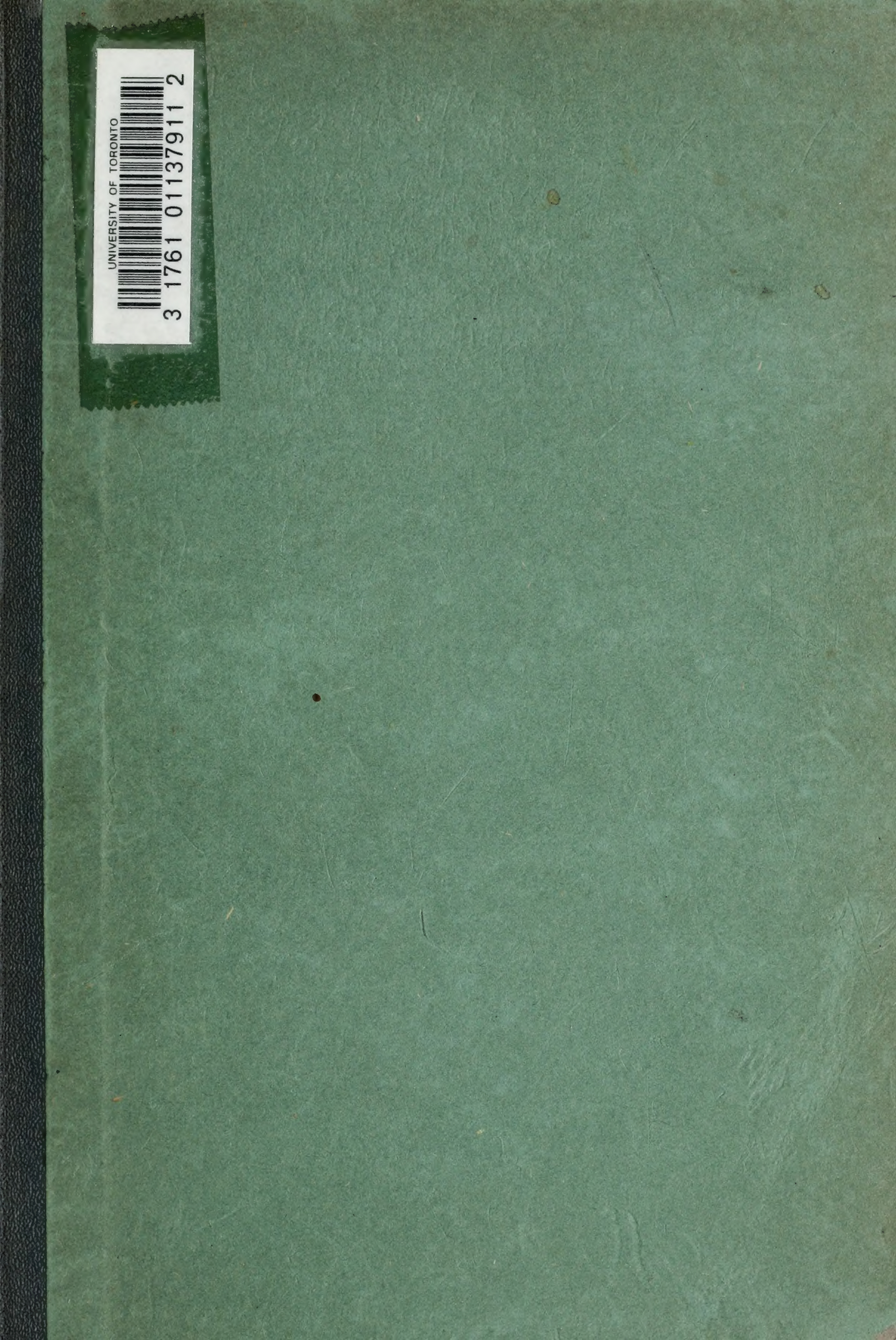
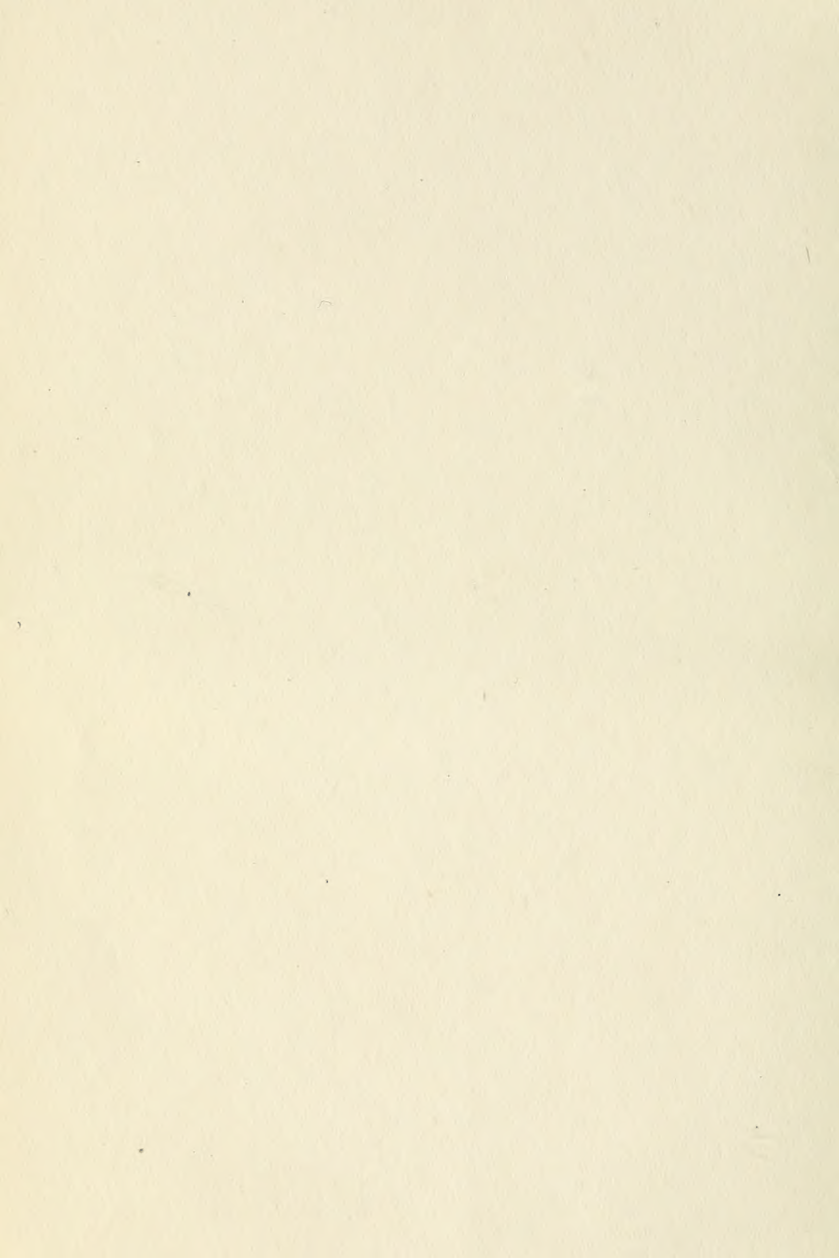

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01137911 2











Differenzengleichung zurückführt. Betrachten wir zum Beispiel eine Gleichung der Form[129])

$$(47) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta^i Q(x)}{i!} f(x+i) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta^{i-1} P(x)}{(i-1)!} f(x+i),$$

wo $Q(x)$ und $P(x)$ Polynome sind:

$$Q(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n),$$
$$P(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n).$$

Das Integral (46) genügt dieser Gleichung, wenn man v als Lösung der Gleichung

$$v(x+1) = \frac{Q(x)}{P(x)} v(x)$$

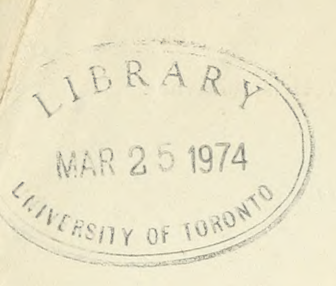
bestimmt. Man hat somit

$$v(x) = \frac{\Gamma(x-\alpha_0)\,\Gamma(x-\alpha_1)\dots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\gamma_1)\,\Gamma(x-\gamma_2)\dots\Gamma(x-\gamma_n)} \pi(x),$$

wo $\pi(x)$ eine periodische Funktion bedeutet. n verschiedene Bestimmungen dieser Funktion geben ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (47).

129) *Nörlund,* Sur une classe d'intégrales définies, J. math. pures appl. (6) 9 (1913), p. 77—88.

(Abgeschlossen im April 1922.)



II C 8. DIE NEUERE ENTWICKLUNG DER ANALYTISCHEN ZAHLENTHEORIE.

Von

H. BOHR IN KOPENHAGEN (DÄNEMARK) UND **H. CRAMÉR** IN STOCKHOLM (SCHWEDEN)

Dieser Artikel, welcher den 1900 abgeschlossenen *Bachmann*schen Artikel (I C 3) weiterführen soll, besteht aus zwei Teilen, von denen der erste, der von *Bohr* ausgearbeitet ist, insofern einen vorbereitenden Charakter trägt, als er sich ausschließlich mit den für die Behandlung der zahlentheoretischen Probleme nötigen funktionen- und reihentheoretischen Hilfsmitteln beschäftigt, während der zweite, welcher von *Cramér* herrührt, die betreffenden Probleme selbst behandelt.

Es wurde von den Verfassern zweckmäßig gefunden, dem Artikel, obwohl er sich nur in geringem Grade mit der älteren, in dem *Bachmann*schen Artikel behandelten Literatur befaßt, jedoch eine in sich abgerundete Form zu geben, so daß er gewissermaßen als ein selbständiges Ganzes hervortritt.*)

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

I. Allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen.

*) Bei der Ausarbeitung ist uns die von dem Meister des Gebietes, *J. Hadamard,* in der französischen Ausgabe der Encyklopädie gegebene Bearbeitung und Weiterführung des *Bachmann*schen Artikels von großer Bedeutung gewesen. Dasselbe gilt von dem klassischen Werk von *E. Landau,* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 1—2, Leipzig und Berlin 1909, welches wir im folgenden einfach mit „Handbuch" zitieren werden.

Erster Teil.

In diesem Teil, der, wie in den einleitenden Worten gesagt, einen rein analytischen Charakter trägt, d. h. von den zahlentheoretischen Anwendungen prinzipiell absieht, wird die Theorie der *Dirichletschen Reihen* besprochen, welche sich — obwohl ihre wesentliche Bedeutung in ihrer Stellung als besonders geeignetes Hilfsmittel zur funktionentheoretischen Behandlung von zahlentheoretischen Aufgaben zu ersehen ist, und sie immer noch ihre meisten Problemstellungen der analytischen Zahlentheorie verdankt — doch im Laufe der letzten Jahrzehnte zu einem selbständigen Abschnitt der allgemeinen Reihenlehre entwickelt hat. Das Referat ist in zwei Kapitel eingeteilt, von denen das erste die Theorie der allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen behandelt, während das zweite der für das Studium der Primzahlen fundamentalen speziellen *Dirichlet*schen Reihe, welche die *Riemann*sche Zetafunktion darstellt, gewidmet ist. Bei der Abfassung ist mehr Gewicht auf eine bequeme Übersicht der wichtigeren Resultate als auf strenge Vollständigkeit gelegt.

I. Allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen.[1])

1. Definition einer Dirichletschen Reihe. Unter *einer allgemeinen Dirichletschen Reihe* wird eine unendliche Reihe der Form

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

verstanden; hierbei bedeutet $s = \sigma + it$ eine komplexe, unabhängige Variable, die Koeffizienten a_n sind beliebige komplexe Zahlen, während die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ eine reelle monoton wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_n \to \infty$ bezeichnet.[2]) Für die folgende Darstellung wird es bequem sein, die (unwesentliche) Annahme $\lambda_1 \geqq 0$ zu machen. Für $\lambda_n = n$ ist (1) eine Potenzreihe in der Variablen e^{-s}. In dem beson-

---

1) Betreffs vieler Einzelheiten in der Theorie sei der Leser auf *E. Landau,* Handbuch, und *G. H. Hardy-M. Riesz,* The general theory of Dirichlet's series, Cambridge tracts, Nr. 18 (1915), verwiesen.

2) *W. Schnee,* Über irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen, Dissertation, Berlin 1908, und *K. Väisälä,* Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen, Acta Universitatis Dorpatensis (1921), betrachten auch Reihen mit *komplexen* Exponenten λ_n und untersuchen, unter welchen Bedingungen solche Reihen sich „ähnlich" benehmen wie Reihen mit reellen Exponenten.

ders wichtigen Spezialfall $\lambda_n = \log n$ erhalten wir die *gewöhnlichen Dirichletschen Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{2}$$

Die spezielle Reihe (2), bei welcher $a_n = 1$ ist für alle n, also die Reihe

$$\sum \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \tag{3}$$

definiert die *Riemannsche Zetafunktion*, deren Theorie in einem besonderen Kapitel behandelt wird. Als ein anderes wichtiges Beispiel einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe (2) sei eine solche erwähnt[3]), bei der die Koeffizienten a_n sich periodisch wiederholen (etwa mit der Periode k), und die Summe der Koeffizienten erstreckt über eine Periode gleich 0 ist, wo also

$$a_n = a_m \quad \text{für} \quad m \equiv n \pmod k, \quad \sum_{n=1}^{k} a_n = 0. \tag{4}$$

Zu diesem Typus gehört z. B. die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots, \tag{5}$$

welche durch formale Multiplikation der Zetareihe (3) mit dem Faktor $1 - 2^{1-s}$ entsteht. Andere wichtige Typen gewöhnlicher *Dirichlet*scher Reihen werden in Nr. 7 besprochen.

2. Die drei Konvergenzabszissen. Eine *Dirichlet*sche Reihe (1), die in einem Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *absolut konvergiert*, wird offenbar in jedem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geqq \sigma_0$ absolut konvergieren; denn es ist ja, $s - s_0 = s'$ gesetzt,

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n s_0} \cdot e^{-\lambda_n s'} \tag{6}$$

und $|e^{-\lambda_n s'}| \leqq 1$ für $\Re(s') \geqq 0$. Jede Reihe (1) besitzt daher eine *absolute Konvergenzabszisse* σ_A derart, daß (1) für $\sigma > \sigma_A$ absolut konvergiert, für $\sigma < \sigma_A$ dagegen nicht; hierbei sind, den Werten $+\infty$ und $-\infty$ von σ_A entsprechend, diejenigen Fälle mit inbegriffen, wo die Reihe nirgends bzw. überall absolut konvergiert.

Tiefer liegt der Satz von *Jensen*[4]), daß, wenn die Reihe (1) im Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *konvergiert*, sie dann auch in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergiert. Diesen Hauptsatz der Theorie beweist *Jensen*

---

3) *G. Lejeune Dirichlet*, Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres, Crelles J. 19 (1839), p. 324—369 = Werke, Bd. 1, p. 411 u. f.

4) *J. L. W. V. Jensen*, Om Rækkers Konvergens, Tidsskr. for Math. (5) 2 (1884), p. 63—72.

von (6) aus, indem er mit Hilfe partieller (*Abel*scher) Summation nachweist, daß bei festem s' mit $\Re(s') > 0$ die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s'}\}$ eine „konvergenzerhaltende" ist in dem Sinne, daß aus der Konvergenz einer Reihe $\sum b_n$ die Konvergenz der „multiplizierten" Reihe $\sum b_n e^{-\lambda_n s'}$ folgt. Es gibt also auch eine *Konvergenzabszisse* $\sigma_B (\leqq \sigma_A)$ derart, daß (1) für $\sigma > \sigma_B$ konvergiert, für $\sigma < \sigma_B$ divergiert.

Cahen[5]), der zuerst die *Dirichlet*schen Reihen einer systematischen Untersuchung unterworfen hat, zeigt, daß (1) in jedem Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $|s| < K$ *gleichmäßig konvergiert* und somit in der Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ eine *reguläre analytische Funktion* $f(s)$ darstellt. Im allgemeinen konvergiert aber eine Reihe (1) *nicht* gleichmäßig in der *ganzen* Halbebene $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, und *Bohr*[6]) hat daher die *gleichmäßige Konvergenzabszisse* σ_G eingeführt, welche definiert wird als die untere Grenze aller Abszissen σ_0, für die (1) in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ gleichmäßig konvergiert. Hierbei ist offenbar $-\infty \leqq \sigma_B \leqq \sigma_G \leqq \sigma_A \leqq +\infty$, und es können die drei Konvergenzabszissen alle Werte tatsächlich haben, welche mit diesen Ungleichungen verträglich sind.[7])

Die drei Konvergenzabszissen einer Reihe (1) können leicht aus den Koeffizienten und Exponenten der Reihe bestimmt werden. Für die Abszisse σ_B gilt nach *Cahen*[8]) der Satz: Falls $\sigma_B > 0$ ist[9]), wird

---

5) *E. Cahen,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues, Ann. Éc. Norm. (3) **11** (1894), p. 75—164.

6) *H. Bohr*, a) Sur la convergence des séries de Dirichlet, Paris C. R. 151 (1910), p. 375—377; b) Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Crelles J. 143 (1913), p. 204—211; c) Nogle Bemærkninger om de Dirichletske Rækkers ligelige Konvergens, Mat. Tidsskr. B 1921, p. 51—55.

7) *L. Neder*, Über die Lage der Konvergenzabszissen einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabszisse ihrer Summe, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 20.

8) *E. Cahen,* a. a. O. 5). Ein Teil des Satzes findet sich schon bei *J. L. W. V. Jensen,* Sur une généralisation d'une théorème de Cauchy, Paris C. R. 106 (1888), p. 833—836.

9) Die Bedingung $\sigma_B > 0$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, weil ja die Konvergenzabszisse σ_B, falls sie $> -\infty$ ist, immer durch die einfache Transformation $s = s' - c$ um eine Konstante c vergrößert werden kann. Ausdrücke für σ_B, die im Falle $\sigma_B < 0$ oder sogar für jede Lage von σ_B gelten, sind gegeben von *S. Pincherle,* Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti, Atti d. IV Congr. intern. d. Mat. 2 (Rom 1908), p. 44—48; *K. Knopp,* Über die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 10 (1910), p. 1—7; *W. Schnee,* Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen, Gött. Nachr. 1910, p. 1—42; *T. Kojima,* a) On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 6 (1914), p. 134—139; b) Note on the convergence-abscissa of

sie durch den Ausdruck

(7) $$\sigma_B = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|S_n|}{\lambda_n} \qquad \left(S_n = \sum_1^n a_m\right)$$

gegeben; d. h. σ_B ist die untere Grenze aller positiven Zahlen α, für welche die „summatorische“ Funktion S_n gleich $O(e^{\lambda_n \alpha})$ ist.[10])

Aus (7) ergibt sich sofort, daß im Falle $\sigma_A > 0$

$$\sigma_A = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n}{\lambda_n}. \qquad \left(R_n = \sum_1^n |a_m|\right)$$

Für die gleichmäßige Konvergenzabszisse σ_G gilt schließlich, falls $\sigma_G > 0$ ist, die entsprechende Formel[11]):

$$\sigma_G = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log T_n}{\lambda_n},$$

wo T_n, bei festem n, die obere Grenze von $\left|\sum_1^n a_m e^{-\lambda_m i t}\right|$ für $-\infty < t < \infty$ bezeichnet.

Für Reihen (1), bei denen die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ hinreichend schnell ins Unendliche wächst (z. B. für die Potenzreihen, wo $\lambda_n = n$ ist), gilt immer die Gleichung $\sigma_A = \sigma_B$ $(= \sigma_G)$, d. h. sie besitzen keinen bedingten Konvergenzstreifen. Die genaue notwendige und hinreichende Bedingung, die eine Exponentenfolge erfüllen muß, damit jede zu ihr gehörige *Dirichlet*sche Reihe der Bedingung $\sigma_A = \sigma_B$ genügt, ist

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0.$$

Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 28—37; *M. Fujiwara*, a) On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 6 (1914), p. 140—142; b) Über Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe, Tôhoku J. 17 (1920), p. 344—350; *E. Lindh* (bei *Mittag-Leffler*), Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet, Paris C. R. 160 (1915), p. 271—273; *B. Malmrot*, Sur une formule de M. Fujiwara, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 14 (1919), No. 4, p. 1—10.

10) Soll die Reihe (1) noch in Punkten *auf* der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ (> 0) konvergieren, ist es nach *Jensen*, a. a. O. 8), notwendig (aber nicht hinreichend, vgl. Nr. 5), daß die summatorische Funktion S_n der Bedingung $S_n = o(e^{\lambda_n \sigma_B})$ genügt.

11) Für *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihen $(\lambda_n = \log n)$ bei *H. Bohr*, Darstellung der gleichmäßigen Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ als Funktion der Koeffizienten der Reihe, Arch. Math. Phys. (3) 21 (1913), p. 326—330, für *beliebige Dirichlet*sche Reihen bei *M. Kuniyeda*, Uniform convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 7—27. In der letzten Arbeit sind auch Formeln für σ_G angegeben, die für jede Lage von σ_G gelten. (Vgl. Note 9).)

Allgemein gilt der Satz[12]), daß *die maximale Breite M des bedingten Konvergenzstreifens* $\sigma_B \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ für alle zu einer gegebenen Exponentenfolge gehörigen Reihen (1) durch den Ausdruck

$$M = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

gegeben wird. Für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) ist somit die maximale Breite $M = 1$. Diese Breite 1 wird z. B. bei jeder Reihe (2), die den Bedingungen (4) genügt, erreicht; in der Tat ist hier $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 0$.

3. Der Eindeutigkeitssatz. Aus der einfachen Bemerkung, daß die Funktion $e^{-\lambda s} = e^{-\lambda(\sigma + it)}$ $(\lambda > 0)$ für $\sigma \to \infty$ um so schneller gegen 0 abnimmt, je größer der Exponent λ ist, ergibt sich leicht: falls eine *Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B < \infty$ die Bedingung $\sigma_A < \infty$ oder nur die Bedingung $\sigma_G < \infty$ [6c]) erfüllt, dann *überwiegen für $\sigma \to \infty$ die Anfangsglieder der Reihe den Rest,* d. h. es gilt, bei jedem festen N, für $\sigma \to \infty$ *gleichmäßig in t* die Limesgleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} + o(e^{-\lambda_N \sigma}); \tag{9}$$

hieraus folgt sofort, daß, wenn nicht sämtliche Koeffizienten a_n gleich 0 sind, die Summe $f(s)$ bei hinreichend großem K in der ganzen Halbebene $\sigma > K$ von 0 verschieden sein wird. Für *Reihen* (1) *mit* $\sigma_G < \infty$ gilt daher der folgende *Eindeutigkeitssatz*: Sind zwei *Dirichlet*sche Reihen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $g(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s}$ gleichgroß in allen Punkten einer Zahlenfolge $\{s_n = \sigma_n + i t_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$, dann sind die beiden Reihen identisch; denn in der *Dirichlet*schen Reihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$, welche durch Subtraktion von $f(s)$ und $g(s)$ entsteht, müssen ja alle Koeffizienten c_n gleich 0 sein.

Für eine *beliebige Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B < \infty$ gilt die Limesgleichung (9) für $\sigma \to \infty$ im allgemeinen *nicht* gleichmäßig in t, wenn t das *ganze* Intervall $-\infty < t < \infty$ durchläuft. Dagegen gilt (9), wie von *Perron*[13]) bewiesen, gleichmäßig in t, wenn t durch eine Bedingung der Form $|t| < e^{k\sigma}$ beschränkt wird, wo k eine beliebige Konstante bedeutet. In diesem *allgemeinen Fall* finden wir daher den folgenden *Eindeutigkeitssatz*: Wenn zwei *Dirichlet*sche Reihen mit

12) *E. Cahen,* a. a. O. 5). Vgl. auch *Hardy-Riesz,* a. a. O. 1), p. 9.

13) *O. Perron*, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Crelles J. 134 (1908), p. 95—143. Daß die Limesgleichung (9) für ein *festes* t gilt, steht schon bei *Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind,* Braunschweig 1863, p. 410—414. Vgl. auch eine (in Math. Ztschr. bald erscheinende) Arbeit von *L. Neder,* Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen.

$\sigma_B < \infty$ in den Punkten einer Zahlenfolge $\{s_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$ und $|t_n| < e^{k\sigma}$ gleichgroß sind, so sind die beiden Reihen identisch. Hier kann die Forderung $|t_n| < e^{k\sigma_n}$ nicht weggelassen werden, denn es existieren tatsächlich Reihen (1), deren Koeffizienten nicht alle 0 sind, die jedoch eine Folge von Nullstellen $\{s_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$ besitzen.[14])

4. Die Koeffizientendarstellungsformel. Aus dem Eindeutigkeitssatze in Nr. 3 folgt sofort: wenn eine in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ reguläre analytische Funktion $f(s)$ durch eine konvergente *Dirichlet*sche Reihe darstellbar ist, dann müssen die Exponenten λ_n und die Koeffizienten a_n dieser Reihe aus der Funktion $f(s)$ eindeutig bestimmt werden können. Die tatsächliche Bestimmung dieser beiden Zahlenfolgen $\{\lambda_n\}$ und $\{a_n\}$ wird durch den unten folgenden Satz gegeben, dessen *formale* Herleitung[15]) sich aus der bekannten, für jedes positive c gültigen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\alpha s}}{s}\,ds = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

ergibt, während seine strenge Begründung zuerst von *Hadamard* und *Perron*[16]) gegeben wurde. Dieser Satz lautet: *Es sei* (1) *eine beliebige Dirichletsche Reihe mit der Konvergenzabszisse* $\sigma_B < \infty$ *und* c *eine positive Zahl* $> \sigma_B$. *Dann gilt für jedes* x *im Intervalle* $\lambda_N < x < \lambda_{N+1}$ *die Formel*

$$\sum_1^N a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s}\,ds. \tag{10}$$

Es ist also das auf der rechten Seite stehende Integral $J(x)$ streckenweise konstant (für $0 < x < \infty$) und die Exponenten λ_n sind die Unstetigkeitsstellen von $J(x)$, während die Koeffizienten a_n sich

14) *H. Bohr,* Beweis der Existenz Dirichletscher Reihen, die Nullstellen mit beliebig großer Abszisse besitzen, Palermo Rend. 31 (1911), p. 235—243.

15) Vgl. *L. Kronecker,* Notiz über Potenzreihen, Monatsber. Akad. Berlin (1878), p. 53—58, und *E. Cahen,* a. a. O. 5). Ein Spezialfall kommt schon bei *B. Riemann,* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Akad. Berlin 1859, p. 671—680 = Werke, p. 145—153, vor.

16) *J. Hadamard,* Sur les séries de Dirichlet, Palermo Rend. 25 (1908), p. 326—330, beweist den Satz unter der Annahme, daß die Reihe eine *absolute* Konvergenzhalbebene besitzt (also $\sigma_A < \infty$) und *O. Perron,* a. a. O. 13) für den allgemeinen Fall. Vgl. auch *E. Phragmén,* Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel, Oefvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 48 (Stockholm 1891), p. 721—744 und *H. v. Mangoldt,* Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemanns Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Sitzungsber. Akad. Berlin 1894, p. 883—896.

als die Sprünge in den Punkten λ_n ergeben.[17]) In einer Unstetigkeitsstelle λ_n selbst ist das Integral $J(x)$ wohl nicht direkt konvergent, es hat aber einen Hauptwert, definiert durch $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}$, und dieser Hauptwert ist gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(J(\lambda_n+0)+J(\lambda_n-0))$.

Das Integral in (10) konvergiert im allgemeinen nur bedingt. Bei verschiedenen Untersuchungen ist es deshalb bequem, statt (10) die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s^2}\,ds = \sum_{1}^{N} a_n(x-\lambda_n) \tag{11}$$

zu benutzen, wo das Integral (wenigstens im Falle $\sigma_G < \infty$, vgl. Nr. 6) absolut konvergiert. Die Formeln (10) und (11) sind übrigens Spezialfälle der allgemeinen Formel[18])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s^{\alpha}}\,ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{1}^{N} a_n(x-\lambda_n)^{\alpha-1}, \tag{12}$$

wo $\alpha \geqq 1$ ist.

5. Beziehung zwischen der Reihe auf der Konvergenzgeraden und der Funktion bei Annäherung an die Konvergenzgerade. In den Punkten der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ einer *Dirichlet*schen Reihe (1) kann das Verhalten der Reihe sehr verschiedenartig sein. Wie im Spezialfall einer Potenzreihe ($\lambda_n = n$) bestehen aber auch bei den allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen wichtige Zusammenhänge zwischen dem Verhalten der *Reihe* in einem Punkte der Konvergenzgeraden und dem Verhalten der dargestellten *Funktion* $f(s)$, wenn die Variable s sich diesem Punkte nähert. Da dies Problem im Spezialfall $\lambda_n = n$ im Artikel II C 4 ausführlich besprochen ist, sollen hier nur einige Hauptresultate erwähnt werden. Zuerst nennen wir den Satz (Analogon zum *Abel-Stolz*schen Satze über Potenzreihen): wenn die Reihe (1) in einem Punkte s_0 der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ *konvergiert* mit der Summe A, dann existiert der *Grenzwert* $\lim f(s)$ und ist $= A$, wenn s sich von rechts längs einer horizontalen Geraden oder sogar

17) Eine andere, von *Hadamard* herrührende Methode, um die Koeffizienten a_n einer *Dirichlet*schen Reihe aus der durch die Reihe dargestellten Funktion zu bestimmen, wird in Nr. 9 besprochen; diese letzte Methode — und nicht die oben angegebene — ist übrigens als die unmittelbare Verallgemeinerung der *Cauchy*schen Methode zur Bestimmung der Koeffizienten einer Potenzreihe anzusehen.

18) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199—220. Wegen der strengen Begründung im Falle $\sigma_A = \infty$ vgl. *O. Perron,* a. a. O. 13).

in einem der Halbebene $\sigma > \sigma_B$ ganz angehörenden Winkelraum dem Punkte s_0 nähert.[19]) Dieser Satz läßt sich natürlich *nicht* ohne weiteres *umkehren*, d. h. aus der Existenz des Grenzwertes folgt nicht die Konvergenz der Reihe im Punkte s_0. Bedingungen, unter welchen die Umkehrung erlaubt ist, wurden von *Landau*, *Schnee*, *Littlewood* und *Hardy-Littlewood* gegeben.[20]) Hier sei nur der tiefliegende Satz von *Littlewood* erwähnt, wonach die Bedingung

$$a_n e^{-\lambda_n s_0} = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \qquad (\text{für } n \to \infty)$$

für die besprochene Umkehrung genügt.

Von etwas anderer Art — weil *Regularität* im Punkte s_0 statt Grenzwert für $s \to s_0$ vorausgesetzt wird — ist ein für verschiedene Anwendungen sehr wichtiger Satz von *M. Riesz*[21]), der als die Verallgemeinerung eines *Fatou*schen Satzes über Potenzreihen ($\lambda_n = n$) anzusehen ist, und der besagt, daß, falls eine *Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B > 0$ die Bedingung

$$(13) \qquad S_n = a_1 + \cdots a_n = o(e^{\lambda_n \sigma_B})$$

erfüllt, sie in jedem Punkte der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$, in welchem die Funktion $f(s)$ *regulär* ist, *konvergiert*, und zwar gleichmäßig in jedem Regularitätsintervall. Die Bedeutung dieses Satzes zeigt sich

19) Für Annäherung längs einer horizontalen Geraden siehe *Dirichlet-Dedekind,* a. a. O. 13), p. 410—414; für Annäherung im Winkelraum *E. Cahen,* a. a. O. 5).

20) *E. Landau*, a) Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes, Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 8—28; b) Über einen Satz des Herrn Littlewood, Palermo Rend. 35 (1913), p 265—276; *W. Schnee,* Über Dirichletsche Reihen, Palermo Rend. 27 (1909), p. 87—116; *J. Littlewood*, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London math. Soc. (2) 9 (1910), p. 434—448; *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood,* Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. London math. Soc. (2) 13 (1913), p 174—191.

21) *M. Riesz,* a) Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, Paris C. R. 149 (1909), p 309—312; b) Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, Acta Math. 40 (1916), p. 349—361. Ein Beweis des Spezialfalls $\lambda_n = \log n$ wurde schon früher (nach einer Mitteilung von *Riesz*) von *E. Landau*, Über die Bedeutung einiger neuer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prac. Mat. Fiz. 21 (1910), p. 97—177, veröffentlicht. Vgl. auch *D. Kojima*, On the double Dirichlet series, Reports Tôhoku University 9 (1920), p. 351—400.

Riesz hat bedeutende Verallgemeinerungen seines Satzes in Aussicht gestellt. Vgl. eine demnächst in den Acta Univ. hung. Francesco-Jos. erscheinende Arbeit. Eine besonders wichtige dieser Verallgemeinerungen — welche den Fall Summabilität statt Konvergenz behandelt, vgl. Nr. **13** — ist in der zahlentheoretischen Arbeit von *H. Cramér,* Über das Teilerproblem von Piltz, Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 21, nach einer Mitteilung von *Riesz* veröffentlicht. Vgl. auch *A. Walfisz,* Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Diss. Göttingen 1922, p. 1—56.

schon darin, daß die Bedingung (13), wie früher[10]) erwähnt, *notwendig* ist, damit die Gerade $\sigma = \sigma_B$ überhaupt eine Konvergenzstelle der Reihe enthalte.

An die erstgenannten Sätze schließt sich eine Reihe von weiteren Sätzen an, wo an Stelle der Konvergenz der Reihe im Punkte s_0 und der Existenz des Grenzwertes der Funktion bei Annäherung an diesen Punkt, bestimmte Art von (eigentlicher) *Divergenz* der Reihe im Punkte s_0 und entsprechende bestimmte Art von *Unendlichwerden* der Funktion bei Annäherung an den Punkt tritt. Solche Sätze, die durch Vergleich mit speziellen einfachen Typen *Dirichlet*scher Reihen abgeleitet werden, verdankt man besonders *Knopp*[22]) und *Schnee*[23]). Als ein einfaches Beispiel für eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) sei der folgende Satz genannt (wo es sich um den Punkt $s_0 = 0$ handelt). Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{\log^\alpha n} = A \qquad (\alpha > 0)$$

folgt

$$\lim_{s\to 0} s^\alpha f(s) = A\,\Gamma(\alpha + 1),$$

wo s durch positive Werte gegen 0 strebt. Mit der viel schwierigeren Frage nach der *Umkehrung* solcher Sätze haben sich *Hardy* und *Littlewood*[24]) beschäftigt. So haben sie z. B. die Umkehrung des eben erwähnten Satzes in dem Falle bewiesen, wo die Koeffizienten a_n sämtlich *positiv* sind. Der weitestgehende von *Hardy* und *Littlewood* bewiesene Satz, welcher den allgemeinen Typus *Dirichlet*scher Reihen (1) betrifft (wo jedoch $\lambda_n : \lambda_{n+1} \to 1$ vorausgesetzt wird) besagt[24b]), daß, wenn eine Reihe (1) mit der Konvergenzabszisse $\sigma_B = 0$ die Limesgleichung

$$\lim_{s\to 0} s^\alpha f(s) = A \qquad (\alpha \geqq 0)$$

erfüllt, und ihre Koeffizienten a_n reell sind und der „einseitigen" Bedingung $a_n > -K\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ genügen[25]), die Gleichung gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{\lambda_n^\alpha} = \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

---

22) *K. Knopp*, a) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Diss. Berlin 1907; b) Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen, Acta Math. 34 (1911), p. 165—204; c) Grenzwerte von Dirichletschen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Crelles J. 138 (1910), p. 109—132.

23) *W. Schnee*, a) a. a. O. 2); b) a. a. O. 20). In der letzten Arbeit gibt *Schnee* einige interessante spezielle Typen *Dirichlet*scher Reihen an, die als „Vergleichsreihen" besonders geeignet sind.

24) Vgl. insbesondere *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood*, a) a. a. O. 20); b) Some theorems concerning Dirichlet's series, Mess. of math. 43 (1914), p. 134—147.

25) Hieraus folgt sofort als Corollar, daß der Satz, im Falle komplexer Koeffizienten, gültig ist, falls die oben angegebene „einseitige" Bedingung durch

Mit den obigen Fragestellungen eng verwandt ist das Problem nach der Beziehung des Verhaltens der Funktion bei Annäherung an einen Punkt s_0 auf der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ und der Art der Divergenz der Reihe in einem Punkte s_1, welcher *links* von dieser Geraden in derselben Höhe wie s_0 gelegen ist; der einfachen Formulierung halber seien beide Punkte auf der reellen Achse angenommen, und zwar $s_1 = 0$ (also $s_0 = \sigma_B > 0$), so daß die Partialsummen im Punkte s_1 die Werte der summatorischen Funktion $S_n = a_1 + \cdots a_n$ ergeben. Hier ist vor allem ein Satz von *Dirichlet*[26]) über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (mit $\sigma_B = 1$) zu erwähnen, der besagt, daß aus

$$\frac{S_n}{n} \to A \qquad \text{(für } n \to \infty)$$

folgt

$$f(s)(s-1) \to A. \qquad \text{(für zu 1 abnehm. } s)$$

Auch dieser Satz läßt sich nicht ohne weiteres umkehren[27]), und zwar nicht einmal, wenn den Koeffizienten der Reihe Bedingungen der Art auferlegt werden (z. B. daß sie alle positiv sein sollen), welche beim vorhergehenden Problem für die Gültigkeit des Umkehrsatzes genügten; es läßt sich im allgemeinen nur behaupten[28]), daß aus $f(s)(s-1) \to A$ folgt

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \geqq A \quad \text{und} \quad \liminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leqq A.$$

Bei den obigen Sätzen, wo aus dem Verhalten der Funktion auf das Verhalten der Reihe geschlossen wurde, bezog sich die Annahme über die Funktion stets auf ihr Verhalten in der Nähe eines *einzigen* Punktes auf der Konvergenzgeraden. Von *Landau*[29]) rührt der folgende

---

die „allseitige" Bedingung $a_n = O(\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}))$ ersetzt wird. Im speziellen Falle $\alpha = 0$ reduziert sich dieser letzte Satz auf den oben erwähnten *Littlewood*schen Satz (über Konvergenz).

26) *G. Lejeune Dirichlet,* Sur un théorème relatif aux séries, J. de math. (2) 1 (1856), p. 80—81 = Werke, Bd. 2, p. 195—200. Verallgemeinerungen solcher Sätze finden sich z. B. bei *A. Pringsheim,* Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 37 (1890), p. 38—60; *A. Berger*, Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres, Nova Acta Upsala (3) 14 (1891), Nr. 2; *J. Franel,* Sur la théorie des séries, Math. Ann. 52 (1899), p. 529—549.

27) Wäre dies der Fall, so „würde das ganze Gebäude der Primzahltheorie mit großer Geschwindigkeit errichtet werden können" (*Landau*, Handbuch, Bd. 1, p. 114).

28) *O. Hölder,* Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze, Math. Ann. 20 (1882), p. 535—549. Vgl. auch *E. Landau,* Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale, Crelles J. 125 (1903), p. 64—188.

29) *E. Landau,* Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Palermo Rend. 26 (1908), p. 169—302. Eine Verschärfung seines Satzes gab *Landau* a. a. O. 21).

tiefliegende Satz her, in welchem Voraussetzungen über die Funktion bei Annäherung an *alle* Punkte der Konvergenzgeraden gemacht werden und daraus ein sehr genaues Resultat über das Verhalten der Reihe (nämlich Umkehrung des obigen *Dirichlet*schen Satzes) hergeleitet wird: Es sei eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) mit positiven Koeffizienten (und $\sigma_B = 1$) in allen Punkten der Konvergenzgeraden $\sigma = 1$ regulär mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum A besitzt; ferner sei für $\sigma \geqq 1$ (und $|t| \to \infty$) die Relation $f(s) = O(|t^k|)$ bei passender Wahl einer Konstanten k erfüllt. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = A.$$

Landau[30]) hat später diesen Satz auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) übertragen. Eine Verallgemeinerung dieses *Landau*schen Satzes und andere ähnliche Sätze haben auf anderem Wege *Hardy* und *Littlewood*[31]) gefunden.

6. Das Konvergenzproblem. In Nr. 2 wurde besprochen, wie die drei Konvergenzabszissen σ_A, σ_B, σ_G von den Koeffizienten und Exponenten der Reihe aus bestimmt werden können. Wir wenden uns nun zu einem viel schwierigeren Problem, dem sogenannten *Konvergenzproblem* der *Dirichlet*schen Reihen, nämlich zur Frage, ob und in welcher Weise die Lage dieser Abszissen (und vor allem der Konvergenzabszisse σ_B) mit einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion $f(s)$ zusammenhängt. Im speziellen Fall $\lambda_n = n$ (Potenzreihe in e^{-s}) ist diese Frage ja einfach dahin zu beantworten, daß die Reihe genau so weit konvergiert, wie die Funktion $f(s)$ *regulär* bleibt; in der Tat, es liegt ja hier immer ein singulärer Punkt auf der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ $(= \sigma_A = \sigma_G)$. Es gilt aber nicht nur in dem ganz speziellen Fall $\lambda_n = n$, sondern für alle solche *Dirichlet*sche Reihen (1), deren Exponentenfolge die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0 \tag{14}$$

erfüllt (wo also, nach Nr. 2, $\sigma_B = \sigma_A$ ist), daß das Konvergenzproblem in einfachster Weise zu lösen ist; die Funktion $f(s)$ braucht wohl hier *nicht* auf (oder in unendlicher Nähe links von) der Konvergenzgeraden

30) *E. Landau,* Handbuch, p. 874.

31) *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood,* a) New proofs of the prime-number theorem and similar theorems, Quart. J. 46 (1915), p. 215—219; b) Contributions to the theory of the Riemann Zetafunction and the theory of the distributions of primes, Acta Math. 41 (1918), p. 119—196.

$\sigma = \sigma_B$ Singularitäten zu besitzen, es gilt aber der fast ebenso einfache Satz, daß die Reihe genau so weit konvergiert, wie die Funktion $f(s)$ *regulär und beschränkt* bleibt, d. h. es ist $\sigma_B (= \sigma_A) = \sigma_b$, wo σ_b (wie überall im folgenden) *die untere Grenze aller Zahlen* σ_0 *bezeichnet, für welche* $f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ *regulär ist und einer Ungleichung* $|f(s)| < K = K(\sigma_0)$ *genügt.*[32]) Für Reihen (1), deren Exponentenfolge „sehr" schnell ins Unendliche wächst, gilt übrigens, daß die Funktion $f(s)$ überhaupt nicht über die Konvergenzgerade hinaus fortgesetzt werden kann; es läßt sich nämlich, wie zuerst *Wennberg*[33]) und später allgemeiner *Carlson* und *Landau*[34]) und *Szász*[35]) gezeigt haben, der *Hadamard-Fabry*sche Lückensatz für Potenzreihen auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen übertragen. Der Satz lautet hier, daß für jede zu einer Exponentenfolge mit $\lambda_n : n \to \infty$ und $\liminf (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ gehörige Reihe (1) die Konvergenzgerade $\sigma = \sigma_B (= \sigma_A)$ eine *wesentlich singuläre Linie* ist.*)

In anderer Richtung — weil Voraussetzungen über die *Koeffizienten* und nicht über die Exponenten gemacht werden — liegt ein

32) Dieser Satz wurde zuerst von *H. Bohr,* a. a. O. 6 b) bewiesen. Einen äußerst einfachen Beweis gab *E. Landau,* Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 317—318. Der Satz umfaßt offenbar den für die Potenzreihen ($\lambda_n = n$) gültigen Satz als Spezialfall, denn im Falle $\lambda_n = n$ ist ja $f(s)$ *periodisch* mit der Periode $2\pi i$, und $f(s)$ wird daher von selbst in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ beschränkt sein, wenn sie dort regulär ist.

Zur Definition der Abszisse σ_b vgl. auch die Arbeit von *H. Bohr*, Ein Satz über Dirichletsche Reihen, Münch. Sitzungsber. 1913, p. 557—562, worin bewiesen wird, daß, falls die durch eine beliebige *Dirichlet*sche Reihe (mit $\sigma_A < \infty$) definierte Funktion $f(s)$ nur in irgendeiner *Viertelebene* $\sigma > \sigma_0$, $t > t_0$ regulär und beschränkt ist, sie von selbst in der ganzen *Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt bleiben wird.

33) *S. Wennberg,* Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Diss. Upsala 1920.

34) *F. Carlson* u. *E. Landau,* Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes, Gött. Nachr. 1921, p. 184—188. Vgl. hierzu auch *L. Neder,* Über einen Lückensatz für Dirichletsche Reihen, Math. Ann. 85 (1922), p. 111—114.

35) *O. Szasz,* Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, Math. Ann. 85 (1922), p. 99—110.

*) In einer soeben erschienenen interessanten Abhandlung von *A. Ostrowski,* Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Hamburger Seminar 1 (1922), p. 327—350, die sich allgemein mit den Abschnittsfolgen einer *Dirichlet*schen Reihe beschäftigt, wird u. a. auch ein *Lückensatz* bewiesen, wo die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ nur „ab und zu" große Lücken aufweist; es wird gezeigt, daß die den Lücken entsprechende Abschnittsfolge so weit konvergiert, wie es von vornherein überhaupt gehofft werden konnte, d. h. so weit, wie die Funktion sich regulär verhält. Vgl. hierzu auch *H. Bohr,* a. a. O.[44])

wichtiger Satz von *Landau*[36]), der ebenfalls die Verallgemeinerung eines bekannten (*Vivanti*schen) Satzes über Potenzreihen darstellt und der besagt, daß, wenn alle Koeffizienten a_n *positiv* sind, der Punkt σ_B, worin die Konvergenzgerade durch die reelle Achse geschnitten wird, immer ein *singulärer* Punkt der Funktion ist.

Für solche *Dirichlet*sche Reihen (1), für welche die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (14) *nicht* erfüllt, z. B. für die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen (2), stellt sich das Konvergenzproblem (wenn keine besonderen Bedingungen über die Koeffizienten gemacht werden) viel schwieriger, und es scheint hier überhaupt zweifelhaft, ob es möglich ist, die Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ durch „einfache" analytische Eigenschaften der dargestellten Funktion genau zu charakterisieren.[37]) Bevor wir über die vorliegenden Resultate berichten können, müssen einige charakteristische Eigenschaften erörtert werden, die einer jeden von einer *Dirichlet*schen Reihe (1) dargestellten Funktion zukommen, und die das Verhalten dieser Funktion $f(s)$ für ins Unendliche wachsende Werte der Ordinate t betreffen. Zuerst nennen wir den Satz, daß jede solche Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$ die Limesgleichung

$$f(s) = f(\sigma + it) = o(|t|) \qquad (\text{für } |t| \to \infty) \tag{15}$$

erfüllt, sogar gleichmäßig in σ.[38]) Es bezeichne nunmehr hier (und überall im folgenden) σ_e ($\leqq \sigma_B$) *die untere Grenze aller Abszissen* σ_0,

---

36) *E. Landau,* Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550. Verallgemeinerungen des *Landau*schen Satzes sind gegeben von *M. Fekete,* a) Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 150 (1910), p. 1033—1036; b) Sur une théorème de M. Landau, Paris C. R. 151 (1910), p. 497—500.

Für die von *Landau* betrachteten Reihen mit $a_n > 0$ ist offenbar $\sigma_A = \sigma_B$; es sei beiläufig bemerkt, daß das bloße Bestehen dieser Gleichung $\sigma_A = \sigma_B$ *nicht* genügt um zu schließen, daß die Konvergenzgerade einen singulären Punkt enthält. *H. Bohr,* Über die Summabilität Dirichletscher Reihen, Gött. Nachr. 1909, p. 247—262.

37) So kennt man z. B. keinen allgemeinen Satz über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), der uns aus einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen (5) definierten ganzen transzendenten Funktion $\zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ darüber Aufschluß gibt, daß diese Reihe eben die Konvergenzabszisse $\sigma_B = 0$ besitzt. Anders verhält es sich, wie aus den späteren Ausführungen hervorgehen wird, mit der gleichmäßigen Konvergenzabszisse $\sigma_G = 1$ und der absoluten Konvergenzabszisse $\sigma_A = 1$ dieser Reihe.

38) *E. Landau,* Handbuch, Bd. 2, p. 824. Der Satz findet sich schon, wie von *Landau* angegeben, implizite bei *O. Perron,* a. a. O. 13). Wie von *H. Bohr,* Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori, Habilitationsschrift, Kopenhagen 1910, p. 32. bewiesen, läßt sich die Gleichung $f(s) = o(|t|)$ durch keine Gleichung der Form $f(s) = o(|t|^\alpha)$ mit $\alpha < 1$ ersetzen.

für welche $f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ *regulär und von endlicher Größenordnung in bezug auf* t *ist,* d. h. gleich $O(|t|^k)$ bei passender Wahl von $k = k(\sigma_0)$. Für jedes feste $\sigma > \sigma_e$ definieren wir alsdann die „Größenordnung" $\mu = \mu(\sigma)$ von $f(s)$ auf der vertikalen Geraden mit der Abszisse σ als die untere Grenze aller Zahlen α, für die $f(\sigma + it) = O(|t|^\alpha)$ ist. Die somit für $\sigma > \sigma_e$ definierte *Funktion* $\mu(\sigma)$ ist nach (15) gewiß $\leqq 1$ für $\sigma > \sigma_B$, und sie ist ferner, wie leicht zu sehen[39]), immer $\geqq 0$ für $\sigma > \sigma_B$. Die genaue Bestimmung der zu einer gegebenen *Dirichlet*schen Reihe gehörigen μ-Funktion ist im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Doch läßt sich mit Hilfe der bekannten allgemeinen Sätze von *Phragmén* und *Lindelöf* (Artikel II C 4, Nr. **10**) über das Verhalten analytischer Funktionen in der Nähe einer wesentlich singulären Stelle (hier des Punktes $s = \infty$) leicht zeigen, *daß* $\mu(\sigma)$ *im ganzen Definitionsintervall* $\sigma > \sigma_e$ *eine stetige konvexe Funktion ist, die überall* $\geqq 0$ *ist, und die mit abnehmendem* σ *niemals abnimmt.* Wenn nicht nur $\sigma_B < \infty$, sondern auch $\sigma_G < \infty$ ist (was ja z. B. für jede gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe mit $\sigma_B < \infty$ der Fall ist), wird übrigens $\mu(\sigma)$ gleich 0 sein für alle hinreichend großen σ, nämlich mindestens für $\sigma > \sigma_G$.[40])

Kehren wir jetzt zum Konvergenzproblem zurück. *Landau*[41]) war der erste, der mit Erfolg die Frage angegriffen hat, inwiefern man aus der Kenntnis der Größenordnung der durch eine *Dirichlet*sche Reihe dargestellten Funktion (d. h. aus ihrer μ-Funktion) Schlüsse über die Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ ziehen kann. Das Problem wurde später von *Schnee*[42]) in einer bedeutsamen Arbeit und von *Landau*[43]) selbst weiter verfolgt. Die Untersuchungen umfassen

---

39) *K. Ananda-Rau,* Note on a property of Dirichlet's series, London math. Soc. (2) 19 (1920), p. 114—116; *T. Jansson,* Über die Größenordnung Dirichletscher Reihen, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 15 (1920), No. 6.

40) Die angeführten Resultate über die μ-Funktion finden sich im wesentlichen implizite bei *E. Lindelöf,* Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$, Bull. de Soc. math. (2) 32 (1908), p. 341—356. Vgl. auch *H. Bohr,* a. a. O. 38), p. 28—36; *G. H. Hardy-M. Riesz,* a. a. O. 1), p. 16—18, und die a. a. O. 39) erwähnten Abhandlungen.

Eine sich auf das Verhalten der oberen Grenze $L(\sigma)$ der Funktion $|f(s)|$ im Intervall $\sigma > \sigma_G$ beziehende Ergänzung des *Lindelöf*schen Satzes über die Konvexität der μ-Funktion ist von *G. Doetsch,* Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 237—240, gegeben.

41) *E. Landau,* a. a. O. 29).

42) *W. Schnee,* Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 66 (1909), p. 337—349.

43) *E. Landau,* a) Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen,

nicht den allgemeinsten Typus *Dirichlet*scher Reihen, sondern es wird der Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ die (für $\lambda_n = \log n$ erfüllte) Bedingung

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n k}) \qquad (k > 0) \tag{16}$$

auferlegt, welche offenbar darauf hinausläuft, daß die Exponenten nirgends allzu dicht aufeinander folgen dürfen.[44]) Indem wir uns der Einfachheit halber auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) beschränken, besagt das allgemeinste Resultat von *Landau* und *Schnee*: Es sei die Reihe (2) in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ nicht nur absolut konvergent, sondern „so deutlich“ absolut konvergent, daß $a_n n^{-\sigma_0}$ gleich $O(n^{-1+\varepsilon})$ bei jedem $\varepsilon > 0$ ist; es sei ferner die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0 - \alpha$ $(\alpha > 0)$ regulär und gleich $O(|t|^k)$. Dann konvergiert die Reihe jedenfalls für

$$\sigma > \sigma_0 - \frac{\alpha}{1+k}.$$

Hierin ist speziell das Resultat (von *Schnee*[42])) enthalten, daß, falls $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ $(= \sigma_0 - \alpha)$ regulär und, bei jedem $\delta > 0$, gleich $O(|t|^\delta)$ ist, $\sigma_B \leqq \sigma_1$ ist, d. h. eine *Dirichlet*sche Reihe (2) ist mindestens so weit nach links konvergent, wie die zugehörige μ-Funktion gleich 0 ist. Die genannten Sätze geben, mit Hilfe der μ-Funktion, hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Reihe in einer gewissen Halbebene, aber keine Bedingungen, die zugleich notwendig und hinreichend sind. Solche Bedingungen gibt es aber überhaupt nicht, d. h. es ist nicht möglich, von der bloßen Kenntnis der μ-Funktion zu einer *genauen* Bestimmung der Konvergenzabszisse σ_B zu gelangen; in der Tat[45]), es existieren *Dirichlet*sche Reihen, sogar vom Typus (2), die dieselbe μ-Funktion, aber verschiedene Konvergenzabszissen σ_B besitzen.

Palermo Rend. 28 (1909), p. 113—151; b) Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen, Leipziger Ber. 69 (1917), p. 336—348.

44) Die Bedingung (16) ist übrigens nicht die von *Landau* und *Schnee* benutzte; sie wurde erst später von *H. Bohr,* Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen, Palermo Rend. 37 (1914), p. 1—16, eingeführt, der zeigte, daß sie die für die betreffenden Untersuchungen „genau richtige“ Bedingung ist, d. h. die für die Gültigkeit der *Landau-Schnee*schen Sätze notwendige und hinreichende.

Zur Orientierung sei bemerkt, daß eine Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$, die der Bedingung (16) genügt, auch der Bedingung $\limsup \log n : \lambda_n < \infty$ genügt (aber nicht umgekehrt), so daß (nach Nr. 2) jede Reihe (1), die (16) erfüllt, gewiß ein *absolutes* Konvergenzgebiet besitzt, falls sie überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt.

45) *H. Bohr,* a. a. O. 38), p. 34.

Ganz anders verhält es sich mit dem Problem der Bestimmung der *gleichmäßigen* Konvergenzabszisse σ_G. Hier gilt nach *Bohr*[46]) der einfache Satz, daß jede *Dirichlet*sche Reihe (1), deren Exponentenfolge die Bedingung (16) erfüllt[47]), also speziell jede gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2), so weit nach links gleichmäßig konvergiert, wie von vornherein überhaupt gehofft werden konnte, d. h. es ist $\sigma_G = \sigma_b$, wo σ_b die oben definierte „Regularitäts- und Beschränktsheitsabszisse" bedeutet.

Es erübrigt die Frage nach dem Zusammenhang der Lage der *absoluten* Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_A$ mit den analytischen Eigenschaften der dargestellten Funktion zu erörtern. Diese Frage kann auch so gestellt werden, daß es sich um die Bestimmung der Breite des Streifens $\sigma_b \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ handelt, in welchem die Funktion $f(s)$ über die absolute Konvergenzhalbebene hinaus regulär und beschränkt bleibt, und dann natürlich vor allem um den maximalen Wert dieser Breite bei gegebener Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$. Diese letztere Frage, zu deren Behandlung Hilfsmittel ganz anderer Art herangezogen werden müssen als diejenigen, worauf die oben referierten Untersuchungen beruhen, wird am Ende der nächsten Nummer besprochen. Dabei werden wir uns wesentlich auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) beschränken; bei diesen Reihen ist, nach dem obigen, $\sigma_b = \sigma_G$, und der besprochene Streifen $\sigma_b \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ kann daher auch als derjenige Streifen charakterisiert werden, in welchem die Reihe gleichmäßig konvergiert ohne absolut zu konvergieren.

7. Anwendung der Theorie der diophantischen Approximationen. Die Rolle, welche die diophantischen Approximationen beim Studium der *Dirichlet*schen Reihen spielen, tritt am deutlichsten hervor bei der Aufgabe, die Menge der Werte zu bestimmen, welche eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) annimmt, wenn die Variable s eine feste vertikale Gerade $\sigma = \sigma_0$ durchläuft. Hierbei umkreist offenbar jedes *einzelne* Glied, d. h. sein Bildpunkt in einer komplexen Ebene, einen festen *Kreis*; in der Tat, es ist, $a_n = \varrho_n e^{i\varphi_n}$ gesetzt,

$$\frac{a_n}{n^{\sigma_0+it}} = \frac{\varrho_n}{n^{\sigma_0}} \cdot e^{i\{\varphi_n - t\log n\}},$$

46) *H. Bohr,* a. a. O. 6a) und b).

47) Bei diesem Problem — im Gegensatz zu dem obigen — ist die Bedingung (16) übrigens *nicht* die „genau richtige", d. h. die für die Gültigkeit des Satzes notwendige und hinreichende. Eine wesentliche Erweiterung der Bedingung (16) ist von *E. Landau,* a. a. O. 32) gegeben. Vgl. hierzu auch *L. Neder,* a) a. a. O. 7); b) Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen, Math. Ztschr. 14 (1922), p. 149—158.

wo der Modul $r_n = \varrho_n n^{-\sigma_0}$ nicht von t abhängt. Wie unmittelbar zu sehen, bewegen sich aber die Glieder nicht in der Weise „quasi unabhängig" voneinander jedes auf seinem Kreise, daß man bei passender Wahl der Variablen t erreichen kann, daß eine beliebig vorgegebene Anzahl N dieser Glieder beliebig nahe an N beliebig gegebene Punkte der entsprechenden N Kreisperipherien fallen; es ist ja dies z. B. für die drei Glieder $\frac{a_2}{2^s}, \frac{a_3}{3^s}, \frac{a_6}{6^s}$ gewiß nicht der Fall, denn aus der Gleichung $\frac{1}{2^s} \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{6^s}$ folgt sofort, daß, wenn die Bildpunkte der beiden ersten Glieder „sehr" nahe an zwei festen Punkten P_2 und P_3 auf ihren respektiven Kreisen liegen, der Bildpunkt des dritten Gliedes von selbst sehr nahe an einen festen, von P_2 und P_3 abhängigen, Punkt P_6 auf seiner Kreisperipherie fallen wird. Betrachten wir aber nicht die Größen $\frac{1}{n^s}$, wo n die sämtlichen Zahlen $1, 2, 3 \cdots$ durchläuft, sondern nur die Größen $\frac{1}{p_n^s}$, wo p_n die *Primzahlen* $2, 3, 5 \cdots$ durchläuft, so stellt die Sache sich ganz anders. Hier können wir nämlich, bei passender Wahl von t, erreichen, daß die Bildpunkte der N Größen $\frac{1}{2^s}, \frac{1}{3^s} \cdots \frac{1}{p_N^s}$ mit beliebig vorgegebener Genauigkeit in N beliebig gegebene Punkte ihrer N Kreisperipherien fallen; die Amplituden dieser Größen sind nämlich durch $-t \log 2, -t \log 3, \cdots -t \log p_N$ gegeben, und weil die Primzahllogarithmen — wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl in Primfaktoren — im rationalen Körper *linear unabhängig* sind, können die genannten N Amplituden nach einem berühmten *Kronecker*schen Satz über diophantische Approximationen beliebig nahe (modulo 2π) an N beliebig gegebene Größen gebracht werden. Von dieser Bemerkung ausgehend hat *Bohr*[48]) die Bedeutung der diophantischen Approximationen für verschiedene Probleme in der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen gezeigt; es sollen im folgenden die wesentlichsten Resultate dieser Untersuchung kurz angegeben werden.

Es bezeichne $p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \cdots p_{n_r}^{\nu_r}$ die Zerlegung der ganzen Zahl n in Primfaktoren, und es sei in der beliebig gegebenen gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum a_n \left(\frac{1}{p_{n_1}^s}\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{p_{n_2}^s}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^s}\right)^{\nu_r}$$

48) Vgl. insb. *H. Bohr,* Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Gött. Nachr. 1913, p. 441—488.

$\frac{1}{p_1^s} = x_1, \frac{1}{p_2^s} = x_2, \cdots \frac{1}{p_m^s} = x_m \cdots$ gesetzt, wodurch die Reihe die Form annimmt:

$$P(x_1, x_2, \cdots x_m \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \cdots x_{n_r}^{\nu_r}$$

$$= c + \sum c_\alpha x_\alpha + \sum c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum c_{\alpha,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots$$

wo $c = a_1$, $c_\alpha = a_{p_\alpha}$, $c_{\alpha,\beta} = a_{p_\alpha p_\beta}$, $\cdots$ ist. Hier sind vorläufig die Größen x_m alle Funktionen der einen Variablen s. Nun denken wir uns aber — weil ja oben gesehen wurde, daß die $x_m = p_m^{-s}$ sich in gewisser Beziehung „fast" so benehmen, als wären sie unabhängig voneinander — das Band zwischen den x_m ganz aufgelöst, d. h. wir fassen die x_m als *voneinander unabhängige* Variablen auf. Die obige Reihe $P(x_1, x_2, \cdots x_m \cdots)$ wird dann offenbar *eine Potenzreihe in den unendlich vielen Variabeln* $x_1, x_2, \cdots$, von der wir sagen werden, daß sie der gegebenen *Dirichlet*schen Reihe (2) entspricht. Betreffs der am Anfang des Paragraphen gestellten Frage nach *dem Verhalten der Reihe* (2) *auf einer vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ ergibt sich dann der Satz: Es sei $\sigma_0 > \sigma_A$ (oder nur $\sigma_0 > \sigma_G$), und es bezeichne $U(\sigma_0)$ bzw. $W(\sigma_0)$ die Menge der Werte, welche die Reihe $f(s)$ auf bzw. in unendlicher Nähe[49]) der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt. Ferner bezeichne $M = M(\sigma_0)$ die Menge der Werte, welche die der *Dirichlet*schen Reihe entsprechende Potenzreihe $P(x_1, x_2 \cdots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2 \cdots$ *unabhängig voneinander* die Kreise $|x_m| = p_m^{-\sigma_0}$ $(m = 1, 2 \cdots)$ durchlaufen. Dann gilt, 1. daß die Menge U in der Menge M *überall dicht* liegt, und 2. daß die Menge W mit der Menge M *identisch* ist. Die Wirkungsweise dieses Satzes wird durch seine später zu erwähnende Anwendung auf die Zetareihe deutlich hervorgehen.

Über die (in Nr. 6 erwähnte) Frage nach *der oberen Grenze T der Differenz $\sigma_A - \sigma_b$ für alle Dirichletschen Reihen* (2), findet man ferner mit Hilfe der Theorie der diophantischen Approximationen den Satz: Es ist

$$T = \frac{1}{S},$$

wo S die obere Grenze aller positiven Zahlen α mit der Eigenschaft bezeichnet, daß jede in einem Gebiete $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2 \cdots)$ *beschränkte*[50]) Potenzreihe $P(x_1, x_2 \cdots)$ im Gebiet $|x_m| \leq \varepsilon_m G_m (m = 1, 2 \ldots)$

49) Dies letzte so zu verstehen, daß eine Zahl w dann und nur dann zur Menge $W(\sigma_0)$ gehört, falls die Gleichung $f(s) = w$ in jedem Streifen $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$ eine Lösung besitzt.

50) Eine Potenzreihe $P(x_1, x_2 \ldots)$ in unendlichvielen Variabeln heißt — nach *D. Hilbert,* Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen

absolut konvergiert, wenn nur $\Sigma\varepsilon_m^\alpha$ konvergiert (und $0 < \varepsilon_m < 1$). Es ist hierdurch die Bestimmung der „Maximalbreite" T auf die Bestimmung der (in der Theorie der Potenzreihen wesentlichen) Konstanten S zurückgeführt. Über diese Konstante S findet man sofort, daß sie $\geqq 2$ ist, woraus folgt, daß $T \leqq \frac{1}{2}$ ist.[51]) Die besonders wichtige Frage, ob nicht $T = 0$ ist (d. h. ob nicht immer $\sigma_A = \sigma_b$ ist), wurde von *Toeplitz*[52]) gelöst, der durch Untersuchungen über quadratische Formen mit unendlichvielen Variabeln zeigte, daß $S \leqq 4$, also $T \geqq \frac{1}{4}$ ist. Das Problem, S (und damit T) genau zu bestimmen, ist noch ungelöst.

Ein bemerkenswertes Resultat ergibt sich, wenn man den besprochenen Zusammenhang zwischen *Dirichlet*schen Reihen und Potenzreihen mit unendlichvielen Variabeln nicht auf die allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen vom Typus (2), sondern auf zwei *spezielle Klassen* solcher Reihen anwendet, nämlich auf diejenigen Reihen (2), die formal eine Zerlegung in Addenden bzw. in Faktoren derart zulassen, daß dadurch *die einzelnen Primzahlen separiert werden,* d. h. deren Koeffizienten entweder die Bedingung: $a_n = 0$ für alle n, die mindestens zwei verschiedene Primzahlen enthalten, oder die Bedingung: $a_m a_l = a_{ml}$ für teilerfremde m und l erfüllen. Für diese beiden Typen *Dirichlet*scher Reihen — die übrigens fast alle in der analytischen Zahlentheorie vorkommenden Reihen (2) umfassen — gilt immer die Gleichung $\sigma_A = \sigma_b$, d. h. eine jede *Dirichlet*sche Reihe einer dieser Typen ist (im Gegensatz zu einer beliebigen Reihe (2)) *genau so weit*

Variabeln, Palermo Rend. 27 (1909), p. 59—74 — *beschränkt* in einem Gebiete $|x_m| \leqq G_m (m = 1, 2 \cdots)$, wenn 1. bei jedem festen m der m^{te} „Abschnitt" $P_m(x_1, \cdots x_m)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, \cdots |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergiert, und 2. eine absolute Konstante K derart existiert, daß bei jedem m und $|x_1| \leqq G_1, \cdots |x_m| \leqq G_m$ die Ungleichung $|P_m(x_1, \cdots x_m)| < K$ besteht.

51) *H. Bohr,* a. a. O. 48). Dies spezielle Resultat $T \leqq \frac{1}{2}$ ist, wie *G. H. Hardy,* The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series, Quart. J. of math. 47 (1916), p. 176—192 gezeigt hat, kein tiefliegendes, d. h. es läßt sich auch ohne Zurückgreifen auf die Theorie der Potenzreihen mit unendlichvielen Variabeln leicht herleiten. Vgl. auch eine interessante Note von *F. Carlson,* Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 172 (1921), p. 838—840, und die eben erschienene Arbeit von *K. Grandjot,* Über das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, Diss. Göttingen 1922, in welcher ein dem *Schnee-Landau*schen Satze über das Konvergenzproblem (vgl. Nr. 6) entsprechender Satz über das absolute Konvergenzproblem abgeleitet wird.

52) *O. Toeplitz,* Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nachr. 1913, p. 417—432.

absolut konvergent, wie die dargestellte Funktion regulär und beschränkt bleibt.[53])

Die oben erwähnten Untersuchungen können von den gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) auf den allgemeinen Typus (1) erweitert werden.[54]) Eine ähnliche Rolle, wie die von den Primzahllogarithmen gebildete Zahlenfolge für die spezielle Exponentenfolge $\{\lambda_n = \log n\}$, spielt im Falle einer *beliebigen Exponentenfolge* $\{\lambda_n\}$ eine sogenannte *Basis* dieser Folge $\{\lambda_n\}$, d. h. eine (aus endlich oder abzählbarvielen Zahlen bestehende) Folge von *linear unabhängigen* Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, daß jeder der Exponenten λ_n als lineare Funktion endlichvieler β mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist. Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn die Exponenten λ_n *selbst* linear unabhängig sind (also selbst eine Basis bilden). Hier gilt ganz allgemein der Satz, daß $\sigma_A = \sigma_b$ ist.[55]) Dies ist die Verallgemeinerung eines obigen Satzes über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), nach welchem die Gleichung $\sigma_A = \sigma_b$ immer gilt, wenn $a_n = 0$ ist für zusammengesetztes n.

8. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Dirichletsche Reihe. Beim Konvergenzproblem in Nr. 6 (und Nr. 7) waren wir von einer Funktion $f(s)$ ausgegangen, von der *vorausgesetzt* wurde, daß sie in einer gewissen Halbebene durch eine *Dirichlet*sche Reihe dargestellt war, und es handelte sich darum, die Lage der Konvergenzabszissen dieser Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion zu bestimmen. Mit dieser Frage verwandt, aber davon wesentlich zu trennen, ist die Frage, welche Bedingungen eine in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ *beliebig gegebene* analytische Funktion erfüllen muß, damit sie überhaupt in eine (dort konvergente) *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Es liegt hierbei nahe, von dem Satze über

---

53) Der „Grund“, weshalb die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen (die ja der Bedingung $a_m a_l = a_{ml}$ genügt) die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_A = 1$ besitzt, ist also, daß die durch die Reihe dargestellte (ganze transzendente) Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ nicht über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus beschränkt bleibt.

54) *H. Bohr*, Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 79 (1919), p. 136—156.

55) *H. Bohr*, Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen, Acta Math. 36 (1913), p. 197—240. Bei diesem Satze über die Bestimmung der *absoluten* Konvergenzabszisse σ_A ist bemerkenswert, daß — im Gegensatze zu den Sätzen in Nr. 6 über die Konvergenzabszisse σ_B und die gleichmäßige Konvergenzabszisse σ_G — überhaupt keine Bedingung über die „ungefähre“ Lage der λ_n (z. B daß sie nicht allzu dicht aufeinander folgen dürfen) nötig ist, sondern nur die angegebene *arithmetische* Bedingung der linearen Unabhängigkeit, welche ja die „genaue“ Lage der λ_n betrifft.

die Koeffizientendarstellung in Nr. 4 auszugehen, welcher die Koeffizienten und Exponenten der Reihe von der Funktion aus bestimmt, und zu untersuchen, ob nicht etwa die Konvergenz und streckenweise Konstanz des dort vorkommenden Integrals $J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xs} f(s)}{s} ds$ für die Entwickelbarkeit einer Funktion $f(s)$ in eine *Dirichlet*sche Reihe genügt. Es zeigt sich nun, daß eine solche unmittelbare Umkehrung des Satzes in Nr. 4 *nicht* gilt[56]), daß sie aber *unter gewissen einschränkenden Bedingungen* gelingt.[57]) Die hierdurch gewonnenen Resultate sind jedoch von einem etwas komplizierten Charakter, und es zeigen überhaupt viele Eigenschaften der *Dirichlet*schen Reihen, daß dieser Reihentypus zur Darstellung von Funktionen allgemeinen Charakters nicht geeignet ist. In diesem Zusammenhange ist vor allem eine schöne Arbeit von *Ostrowski*[58]) zu erwähnen, worin zunächst der Satz bewiesen wird, daß eine durch eine *Dirichlet*sche Reihe (1) dargestellte Funktion $f(s)$ nur in dem sehr speziellen Fall einer *algebraischen „Differenzendifferentialgleichung"* genügen kann, in welchem die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ eine *endliche* lineare Basis besitzt.[59]) Bei den weiteren Untersuchungen von *Ostrowski* erweist es sich als bequem, die Transformation $e^{-s} = x$ auszuführen, also statt einer *Dirichlet*schen Reihe (1) die entsprechende „irreguläre" Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

zu betrachten, die offenbar im Punkte $x = 0$ (welcher $\sigma = +\infty$ ent-

56) Vgl. *O. Perron,* a. a. O. 13) und *E. Landau,* Handbuch, p. 833.

57) Vgl. *J. Hadamard,* a) Sur les séries de Dirichlet, Palermo Rend. 25 (1908), p. 326—330; b) Rectification à la note „Sur les séries de Dirichlet", Palermo Rend. 25 (1908), p. 395—396 und insbesondere die Abhandlungen von *W. Schnee,* a. a. O. 9) und *M. Fujiwara,* Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingung von Funktionen in Dirichletschen Reihen, Tôhoku J. 17 (1920), p. 363 bis 383. In anderer Richtung liegt eine Untersuchung von *J. Steffensen,* Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion als Dirichletsche Reihe, Nyt Tidskr. f. Mat. 1917, p. 9—11.

58) *A. Ostrowski*, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 241—298.

59) Für den speziellen Fall der *Zetafunktion* war es schon durch *D. Hilbert,* Sur les problèmes futurs des Mathématiques, C. R. du 2 congr. intern. d. math. Paris 1902, p. 58—114, bekannt, daß sie keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Vgl. auch *V. Stadigh*, Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen, und über die Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$ keiner solchen Gleichung zu genügen, Dissertation Helsingfors 1902.

spricht) einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung besitzt. Die Frage nach den Funktionen $f(s)$, welche in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden können, tritt dann hier in der Gestalt auf, welche Art von Singularitäten im Punkte $x = 0$ durch eine irreguläre Potenzreihe bewältigt werden können. *Ostrowski* zeigt nun u. a., daß nur in dem oben genannten speziellen Fall, wo die Exponentenfolge eine endliche lineare Basis besitzt, die durch eine solche irreguläre Potenzreihe dargestellte Funktion $F(x)$ einer an der Stelle $x = 0$ *analytischen* Differentialgleichung genügen kann. Durch diesen Satz tritt deutlich zutage, wie „schwer" die Singularität ist, die eine *Dirichlet*sche Reihe im unendlichfernen Punkte besitzt.

9. Der Mittelwertsatz. Aus der Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\alpha t}dt = \begin{cases} 0 \text{ für reelles } \alpha \neq 0 \\ 1 \text{ für } \alpha = 0 \end{cases}$$

folgt sofort durch formales Rechnen, daß, wenn

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s},\ g(s) = \sum b_n e^{-\lambda_n s}$$

zwei beliebige (zur selben λ-Folge gehörige) *Dirichlet*sche Reihen sind, die Gleichung gilt

$$(17) \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma_1 + it)g(\sigma_2 - it)dt = \sum a_n b_n e^{-\lambda_n(\sigma_1+\sigma_2)},$$

worin speziell, $b_n = \bar{a}_n$ und $\sigma_1 = \sigma_2$ entsprechend, die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma_1 + it)|^2 dt = \sum |a_n|^2 e^{-2\lambda_n\sigma_1}$$

enthalten ist. *Hadamard*[60]), der zuerst auf die Gleichung (17) hingewiesen hat, hat ihre Gültigkeit für den Fall bewiesen, in dem die zwei Reihen auf den Geraden $\sigma = \sigma_1$ bzw. $\sigma = \sigma_2$ *absolut* konvergieren, und *Landau*[61]) und *Schnee*[62]) haben später (unter einer gewissen einschränkenden Bedingung über die Dichte der λ-Folge) bewiesen, daß die Formel auch in anderen allgemeinen Fällen gültig bleibt. Als ein für die Anwendungen (z. B. auf die Zetafunktion) besonders wichtiges

60) *J. Hadamard,* Théorème sur les séries entières, Acta Math. 22 (1899), p. 55—63.

61) *E. Landau,* a) a. a. O. 29); b) Neuer Beweis des Schneeschen Mittelwertsatzes über Dirichletsche Reihen, Tôhoku J. 20 (1922), p. 125—130.

62) *W. Schnee,* Über Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen, Wiener Sitzungsber. (IIa) 118 (1909), p. 1439—1522.

Beispiel der *Landau-Schnee*schen Resultate nennen wir den sogenannten *Schneeschen Mittelwertsatz für gewöhnliche Dirichletsche Reihen* (2), der besagt, daß die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma_1+it)|^2 dt=\sum\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}$$

für jedes $\sigma_1 > \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B)$ besteht (aber im allgemeinen *nicht* für $\sigma_1 \leqq \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B)$).

Aus der Gleichung (17) folgt ferner (indem $g(s)$ gleich $e^{-\lambda_n s}$ und $\sigma_2 = -\sigma_1$ gesetzt wird) die *Koeffizientendarstellungsformel*[63])

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma_1+it)e^{\lambda_n(\sigma_1+it)}dt=a_n;$$

diese Formel gilt nach *Landau*[61a]) bei jedem $\sigma > \sigma_B$, und nach *Schnee*[62]) konvergiert der Ausdruck auf der linken Seite sogar *gleichmäßig* in n (unter der oben erwähnten einschränkenden Bedingung über $\{\lambda_n\}$).

10. Über die Nullstellen einer Dirichletschen Reihe. Schon bei Besprechung des Eindeutigkeitssatzes in Nr. 3 wurde die Frage nach der Verteilung der *Nullstellen* einer *Dirichlet*schen Reihe berührt, indem gezeigt wurde, daß gewisse Gebiete der Konvergenzhalbebene nullpunktsfrei sind. Die erste allgemeine Untersuchung des Problems, *wie viel* Nullstellen eine *Dirichlet*sche Reihe in einer Halbebene $\sigma > \sigma_0$ $(> \sigma_B)$ besitzen kann, rührt von *Landau*[64]) her, der mit Hilfe des bekannten *Jensen*schen Satzes bewies, daß für jede *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihe (2) die Anzahl $n(\sigma_B + \varepsilon, T)$ der im Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $T < t < T + 1$ gelegenen Nullstellen gleich $O(\log T)$ und also die Anzahl $N(\sigma_B + \varepsilon, T)$ von Nullstellen im Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $0 < t < T$ gleich $O(T \log T)$ ist. Für *beliebige Dirichlet*sche Reihen (1) bewies *Landau*[64a]) einen entsprechenden Satz, wo nur $\log T$ durch $\log^2 T$ ersetzt ist; später hat *Landau*[64b]) gezeigt, daß in der Formel $n(\sigma_B + \varepsilon, T) = O(\log^2 T)$ der Buchstabe O durch o ersetzt werden kann, während *Wennberg*[33]) bewiesen hat, daß man in der *Landau*schen Formel $N(\sigma_B + \varepsilon, T) = O(T \log^2 T)$ ganz allgemein, d. h. für jede *Dirichlet*sche Reihe (1), $\log^2 T$ durch $\log T$ ersetzen kann, so daß wir also für $N(\sigma_B + \varepsilon, T)$ (aber nicht für $n(\sigma_B + \varepsilon, T)$) genau dieselbe Formel bekommen, wie für die gewöhnlichen Reihen (2).

---

63) Vgl. Note 17).

64) a) *E. Landau,* Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Berliner Sitzungsber. 14 (1913), p. 897—907; b) Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 128—129.

Tiefer — weil auf dem *Schnee*schen Mittelwertsatze beruhend — liegt ein Satz von *Bohr* und *Landau*[65a]) über *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihen (2), welcher besagt, daß bei jedem $\sigma_1 > \sigma_B + \frac{1}{2}$ die Relation $N(\sigma_1, T) = O(T)$ besteht.[66]) Dieser Satz läßt sich nicht verbessern; wohl aber gilt[65b]) für gewisse *spezielle*, für die zahlentheoretischen Anwendungen besonders wichtige Reihen (2), daß der Ausdruck $O(T)$ durch $o(T)$ ersetzt werden kann. Im Anschluß an diese Untersuchungen hat *Carlson*[67]) einen allgemeinen Satz über die Anzahl der Nullstellen einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe gefunden, von dem ein (wegen Anwendung auf die Zetafunktion) besonders wichtiger Spezialfall so lautet: In der Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ sei $a_1 \neq 0$, und es sei σ_B etwa gleich 0; es mögen ferner die Koeffizienten b_n der (formal entwickelten) Reihe $1 : f(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}$ die Bedingung $\lim |b_n| : \log n = 0$ erfüllen. Dann ist bei jedem $\varepsilon > 0$ die Anzahl $N(\frac{1}{2} + \varepsilon, T)$ nicht nur gleich $o(T)$, sondern sogar gleich $O(T^{1-4\varepsilon^2+\delta})$, wo δ beliebig klein ist.

Mit Hilfe von Sätzen aus dem *Picard-Landau*schen Satzkreis lassen sich ferner verschiedene interessante Resultate über den Wertvorrat einer *Dirichlet*schen Reihe (1) ableiten. So ergibt sich nach *Lindelöf*[68]), daß, falls $\sigma_b < \infty$ ist, und $f(s)$ für $\sigma > \sigma_b - \varepsilon$ regulär (also dann gewiß nicht beschränkt) bleibt, $f(s)$ in jedem Streifen um die Gerade $\sigma = \sigma_b$ *sämtliche Werte, höchstens mit einer einzigen Ausnahme* annimmt. Dasselbe Resultat gilt in jedem Streifen um die Gerade

65) *H. Bohr* und *E. Landau*, a) Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen, Palermo Rend. 37 (1914), p. 269—272; b) Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 106—110.

66) Dieselbe Relation $N(\sigma_1, T) = O(T)$ gilt nach *Wennberg* 33) für eine beliebige *Dirichlet*sche Reihe (1), wenn $\sigma_1 > \sigma_b$ angenommen wird, und sie ist hier (wie *Wennberg* mit Hilfe diophantischer Approximationen beweist) die bestmögliche in dem Sinne, daß, falls die Reihe in der Halbebene $\sigma > \sigma_b + \varepsilon$ überhaupt eine Nullstelle besitzt, die Anzahl $N(\sigma_b + \varepsilon, T) \neq o(T)$ ist.

67) *F. Carlson*, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, Arkiv für Mat., Ast. och Fys. 15 (1920), No. 20. Vgl. auch *E. Landau*, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, Arkiv för Mat., Ast. och Fys. 16 (1921), No. 7, der mit Hilfe einer neuen Beweismethode des *Schnee*schen Mittelwertsatzes (vgl. 61b) einen abgekürzten Beweis des *Carlson*schen Satzes gibt.

68) *E. Lindelöf*, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta soc. sc. Fenn. 35 (1908), No. 7. Vgl. auch *H. Bohr* und *E. Landau*, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\chi(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Gött. Nachr. 1910. p. 303—330.

$\sigma = \sigma_e$, falls $f(s)$ für $\sigma > \sigma_e - \varepsilon$ regulär ist.[69]) Ferner wird, nach *Wennberg*[33]), jede *Dirichlet*sche Reihe mit $\sigma_b = \infty$, in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ sämtliche Werte, höchstens mit einer Ausnahme, annehmen. Schließlich sei noch erwähnt, daß jede *Dirichlet*sche Reihe mit *linear unabhängiger* Exponentenfolge (und also mit $\sigma_b = \sigma_A$), falls sie nicht in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_b$ beschränkt ist, in dieser Halbebene überhaupt *jeden* Wert unendlich oft annimmt.[55])

11. Zusammenhang verschiedener Dirichletscher Reihen. Es seien

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{18a}$$

und

$$F(z) = \sum a_n e^{-\mu_n z} \qquad (z = x + iy) \tag{18b}$$

zwei *Dirichlet*sche Reihen mit *denselben Koeffizienten* a_n, deren *Exponenten durch die Relation* $\mu_n = e^{\lambda_n}$ *verbunden sind.* Wie von *Cahen*[5]) gezeigt, besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $f(s)$ und $F(z)$, indem jede von ihnen durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden kann, dessen Integrand in einfacher Weise von der anderen der beiden Funktionen abhängt. Formal ergeben sich diese Darstellungen sehr leicht aus der Integraldarstellung der Γ-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (\sigma > 0)$$

und ihrer im *Mellin*schen Sinne „reziproken" Formel[70])

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \qquad (c > 0,\ x > 0).$$

In der Tat, es lassen sich diese beiden Formeln (nach einer einfachen Transformation) so schreiben:

$$e^{-\lambda_n s}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-\mu_n x} dx, \quad e^{-\mu_n z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} e^{-\lambda_n s} ds,$$

69) Ein Beweis findet sich (implizite) bei *H. Bohr,* Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichletschen Reihen, Wiener Sitzungsber. (IIa) 119 (1910), p. 1391—1397.

70) Diese Formel, deren große Bedeutung sich in den Untersuchungen von *H. Mellin* gezeigt hat, ist (nach *Mellin,* Bemerkungen im Anschluß an den Beweis eines Satzes von *Hardy* über die Zetafunction, Ann. Acad. sc. Fenn. (A) 11 (1917), No. 3) schon von *S. Pincherle,* Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, Rend. Ac. Linc. 4 (1888), p. 694—700 in etwas anderer Form angegeben. Auch in neueren Arbeiten von *Hardy* und *Littlewood* (vgl. z. B. a. a. O. 31) spielt diese „*Cahen-Mellin*sche Formel" eine wichtige Rolle.

und hieraus folgen sofort (durch Multiplikation mit a_n und Summation) die gesuchten Integraldarstellungen

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} F(x)\, dx \tag{19a}$$

und

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} f(s)\, ds. \tag{19b}$$

Bei *Cahen* waren die Konvergenzuntersuchungen noch nicht streng durchgeführt. Dies geschah erst durch *Perron*[71]), der den Satz bewies: Wenn die Reihe (18a) für $\sigma > \sigma_0 > 0$ konvergiert (woraus leicht folgt, daß (18b) mindestens für $x > 0$ konvergiert), so gilt die Formel (19a) für $\sigma > \sigma_0$, und die Formel (19b) bei festem $c > \sigma_0$ für $x > 0$. Im Spezialfalle $\lambda_n = \log n$, $\mu_n = n$ haben wir es mit einer *gewöhnlichen Dirichletschen Reihe* $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ und einer einfachen *Potenzreihe* $F(z) = \sum a_n e^{-nz}$ zu tun.[72]) Ist außerdem noch $a_n = 1$ für alle n, wird $f(s) = \zeta(s)$ und $F(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, und wir erhalten aus der obigen Formel (19a) die von *Riemann*[73]) benutzte wichtige Integraldarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \qquad (\sigma > 1).^{74)}$$

---

71) *O. Perron*, a. a. O. 13). Vgl. auch *G. H. Hardy*, On a case of term-by-term integration of an infinite series, Mess. of Math. 39 (1910), p. 136—139.

72) Wie aus der Integraldarstellung (19a) ersichtlich ist, hängt das analytische Verhalten der *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ mit dem Verhalten der, für $x > 0$ konvergenten, Potenzreihe $F(z) = \sum a_n e^{-nz}$ bei Annäherung an den Punkt $z = 0$, d. h. mit dem Verhalten der (für $|u| < 1$ konvergenten) Potenzreihe $\varphi(u) = \sum a_n u^n$ bei Annäherung an den Punkt $u = 1$, eng zusammen. Vgl. hierüber *G. H. Hardy*, The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation, Lond n math. Soc. (2) 8 (1909), p. 277—294 und *M. Fekete*, a. a O. 36). So besteht z. B. der Satz [*A. Hurwitz*, Über die Anwendung eines funktionentheoretischen Principes auf gewisse bestimmte Integrale, Math. Ann. 53 (1900), p. 220—224], daß, falls $\varphi(u)$ im Punkte $u = 1$ *regulär* ist, $f(s)$ gewiß eine *ganze* Funktion ist. Auch die später zu erwähnende Untersuchung von *Hardy* über *Abel*sche Summabilität *Dirichlet*scher Reihen (2) basiert auf der Verbindung zwischen $f(s)$ und $\varphi(u)$.

73) *B. Riemann*, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Berliner Monatsber 1859, p. 671—680 = Werke (2. Aufl.), p. 145—153.

74) Eine von der Integraldarstellung (19a) wesentlich verschiedene Integraldarstellung einer allgemeinen *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ist von

Bei dem oben besprochenen Zusammenhang zweier *Dirichlet*scher Reihen handelte es sich um Reihen mit denselben Koeffizienten, aber verschiedenen Exponenten. Wie von *Cramér*[75]) gezeigt, besteht auch ein gewisser Zusammenhang zwischen zwei *Dirichlet*schen Reihen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $g(s) = \sum b_n e^{-\lambda_n s}$ mit *denselben Exponenten*, deren Koeffizienten a_n und b_n aber derart voneinander abhängen, *daß* $b_n = a_n \varphi(\lambda_n)$ *ist, wo* $\varphi(z)$ *eine ganze transzendente Funktion von* z *ist*, welche die Bedingung $|\varphi(z)| < e^{k|z|}$ für alle hinreichend großen $|z|$ erfüllt. *Cramér* beweist nämlich, daß, falls die Funktion $f(s)$, welche durch die erste Reihe definiert wird, in einem Gebiete G_1, das über die Konvergenzgerade $\sigma = \sigma_B$ dieser Reihe hinausreicht, regulär ist, die durch die zweite Reihe definierte Funktion $g(s)$ ebenfalls über die „entsprechende" Gerade $\sigma = \sigma_B + k$ analytisch fortsetzbar sein wird, und zwar auf ein Gebiet G_2, das vom Gebiete G_1 in einfach angebbarer Weise abhängt.

12. Multiplikation Dirichletscher Reihen. Wie leicht zu sehen, wird man durch „gewöhnliches" Rechnen mit *Dirichlet*schen Reihen wieder zu *Dirichlet*schen Reihen geführt; speziell entsteht durch *Multiplikation* zweier beliebiger *Dirichlet*scher Reihen

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \text{und} \quad g(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s} \tag{20}$$

wiederum eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$, und zwar führt die Multiplikation zweier *gewöhnlicher Dirichlet*scher Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ und $\sum \frac{b_n}{n^s}$ wieder zu einer *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihe $\sum \frac{c_n}{n^s}$, deren Koeffizienten c_n durch die Formel $c_n = \sum a_m b_l$ bestimmt werden, wobei m und $l = n : m$ alle Teiler von n durchlaufen.[76])

J. Steffensen, Ein Satz über *Stieltjes*sche Integrale mit Anwendung auf *Dirichlet*sche Reihen, Palermo Rend. 36 (1913), p. 213—219, angegeben; die *Steffensen*sche Formel, die die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma > 0$ voraussetzt, lautet

$$f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty x^{-s} B(x)\, dx \qquad (0 < \sigma < 1),$$

wo $B(x)$ die *Partialbruchreihe*

$$B(x) = \sum \frac{a_n}{x + \mu_n} \qquad (\mu_n = e^{\lambda_n})$$

bezeichnet.

75) *H. Cramér,* a) Sur une classe de séries de Dirichlet, Dissertation Upsala (Stockholm 1917); b) Un théorème sur les séries de Dirichlet et son application, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), No. 22.

76) Aus diesem Bildungsgesetz der Koeffizienten c_n folgt z. B., wie von *H. Mellin,* Ein Satz über Dirichletsche Reihen, Ann. Ac. sc. Fenn. (A) 11 (1917), No. 1 hervorgehoben, daß die modulo q gebildeten „Partialreihen" der Produkt-

Sind die gegebenen Reihen (20) in einem Punkte s_0 beide *absolut konvergent,* so wird offenbar auch die durch Multiplikation entstandene Reihe im Punkte s_0 absolut konvergieren (und zwar mit der Summe $f(s_0) \cdot g(s_0)$). Einem bekannten *Mertens*schen Satze über Potenzreihen entsprechend (und ihn verallgemeinernd) gilt ferner nach *Stieltjes*[77]) der Satz, daß die Produktreihe konvergiert in jedem Punkt s_0 (mit der Summe $f(s_0) \cdot g(s_0)$), in welchem nur *eine* der Faktorenreihen absolut konvergiert, während die andere nur bedingt konvergiert. Dagegen braucht die Produktreihe in einem Punkte, worin *beide* Faktorenreihen bedingt konvergieren, *nicht* zu konvergieren, und dieses kann nicht nur am Rande der Konvergenzgebiete der Reihen der Fall sein; denn, wie *Landau*[29]) gezeigt hat, gibt es sogar zwei gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), die beide in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergieren, deren Produktreihe aber *nicht* in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergiert. Andererseits gibt es doch, nach *Stieltjes* und *Landau*[78]), wichtige Sätze, welche die Konvergenz der Produktreihe in Gebieten, in welchen die Faktorenreihen *beide nur bedingt konvergieren,* sichern. Als ein charakteristisches Beispiel nennen wir den Satz, daß, falls die Faktorenreihen beide für $\sigma > \alpha$ konvergieren und für $\sigma > \alpha + \beta$ absolut konvergieren, die Produktreihe mindestens für $\sigma > \alpha + \frac{\beta}{2}$ konvergiert. Hierbei läßt sich die Zahl $\alpha + \frac{\beta}{2}$ durch keine bessere (d. h. kleinere) ersetzen, denn wie *Bohr*[38]) gezeigt hat, gibt es eine *Dirichlet*sche Reihe (2) mit $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 0$, deren Quadratreihe die Konvergenzabszisse $\sigma_B = \frac{1}{2}$ besitzt.[79])

---

reihe $\sum \frac{c_n}{n^s}$ in einfacher Weise durch die „Partialreihen" der gegebenen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ und $\sum \frac{b_n}{n^s}$ ausgedrückt werden können.

77) *T. Stieltjes,* Note sur la multiplication de deux séries, Nouv. Ann. de Math. (3) 6 (1887), p. 210—215.

78) *T. Stieltjes* a. a. O. 77) und Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres, Paris C. R. 101 (1885), p. 368—370 gibt ohne Beweise die wesentlichsten dieser Sätze an, doch nur für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2). Verallgemeinerungen auf den Fall beliebiger *Dirichlet*scher Reihen (1) (sowie Verallgemeinerungen anderer Art) und Beweise der Sätze sind von *E. Landau,* Über die Multiplikation Dirichletscher Reihen, Palermo Rend. 24 (1907), p. 81—160 und Handbuch, p. 755—762 gegeben.

79) Von etwas anderer Art als die obigen Sätze ist ein Satz von *G. H. Hardy,* On the multiplication of Dirichlet's series, London math. Soc. (2) 10 (1911), p. 396—405, welcher besagt, daß, falls die Faktorenreihen beide im Punkte $s = 0$ konvergieren und $a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}\right)$, auch die Produktreihe im Punkte 0 konvergiert. Vgl. hierzu auch *A. Rosenblatt,* Über einen Satz

Der bekannte *Cesàro*sche Satz über Potenzreihen ($\lambda_n = n$), der ja besagt, daß, wenn $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ in einem Punkte, etwa $x = 1$, mit den Summen A und B konvergieren, die Produktreihe $\sum c_n x^n$ im Punkte $x = 1$ gewiß summabel $(C, 1)$ mit der Summe $A \cdot B$ ist (d. h. das arithmetische Mittel ihrer Partialsummen strebt gegen $A \cdot B$) wurde von *Phragmén*, *M. Riesz* und *Bohr*[80]) auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) übertragen; der Satz besagt hier, daß, falls $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $\sum b_n e^{-\mu_n s}$ in einem Punkte, etwa $s = 0$, mit den Summen A und B konvergieren, die Produktreihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$ im Punkte $s = 0$ in dem Sinne *summabel mit der Summe* AB ist, daß, $C_n = \sum\limits_1^n c_n$ gesetzt,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_1(\nu_2 - \nu_1) + C_2(\nu_3 - \nu_2) + \cdots + C_{n-1}(\nu_n - \nu_{n-1})}{\nu_n} = AB.$$

Im speziellen Falle *gewöhnlicher Dirichlet*scher Reihen

$$(\lambda_n = \mu_n = \nu_n = \log n)$$

lautet also die Gleichung:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_1(\log 2 - \log 1) + \cdots + C_{n-1}(\log n - \log(n-1))}{\log n} = AB.$$ [81])

Diese Mittelwertbildung (mit Gewichten) bildet den Ausgangspunkt für die bekannte, von *M. Riesz* ausgearbeitete, allgemeine Summabilitätsmethode für beliebige *Dirichlet*sche Reihen, über die wir im nächsten Paragraphen näher berichten werden. Aus dem oben angegebenen Satze geht speziell hervor, daß, falls die Produktreihe

---

des Herrn Hardy, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 80—84 (welcher zeigt, daß eine bei *Hardy* der Exponentenfolge auferlegte Bedingung unnötig ist) und *E. Landau,* Über einen Satz des Herrn Rosenblatt, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 238. Ferner ist ein Satz von *Hardy* und *Littlewood,* a. a. O. 24 b) zu erwähnen, welcher aus der Voraussetzung der Konvergenz gewisser aus den beiden zu multiplizierenden Reihen gebildeten Hilfsreihen die Konvergenz der durch Multiplikation entstandenen Reihe folgert.

80) Der Beweis von *E. Phragmén* wurde brieflich *E. Landau* mitgeteilt und findet sich im Handbuch, p. 762—765. Vgl. auch *M. Riesz,* Sur la sommation des séries de Dirichlet. Paris C. R. 149 (1909), p. 18—21 und *H. Bohr,* a. a. O. 36).

81) Dagegen braucht das einfache [und, *Riesz,* a. a. O. 80), sogar auch das beliebig oft wiederholte] „arithmetische" Mittel $\frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots C_n)$ *nicht* für $n \to \infty$ zu konvergieren. [Es ist ein allgemeines Prinzip, daß eine Summabilitätsmethode durch Mittelwertbildungen der Form $\frac{\mu_1 C_1 + \cdots + \mu_n C_n}{\mu_1 + \cdots + \mu_n}$ um so kräftiger ist, je „langsamer" $\mu_1 + \cdots + \mu_n \to \infty$.] Über das nähere Verhältnis der „arithmetischen" Mittelwertbildung zu der „logarithmischen" Mittelwertbildung vgl. Nr. **13**, Note 86.

konvergent (und nicht nur summabel) ist, sie gewiß die „richtige" Summe, d. h. die Summe $A \cdot B$ hat. Dieser letzte Satz war schon früher von *Landau*[78]) in dem speziellen Falle, wo mindestens eine der Faktorenreihen eine *absolute* Konvergenzhalbebene besitzt, durch funktionentheoretische Überlegungen bewiesen.

Wir verlassen hiermit die Konvergenztheorie der *Dirichlet*schen Reihen, um uns der Summabilitätstheorie dieser Reihen zuzuwenden. Hierbei werden wir sehen, daß die Erweiterungen des Konvergenzbegriffes für die Theorie der *Dirichlet*schen Reihen eine noch größere Rolle spielt, als es z. B. bei den Potenzreihen der Fall ist. In der Tat, bei den *Dirichlet*schen Reihen können schon die allereinfachsten Summabilitätsmethoden in ganzen *Gebieten* außerhalb der Konvergenzhalbebene verwendet werden, während solche Methoden bei den Potenzreihen nur *auf dem Rande* des Konvergenzgebietes von Bedeutung sind.

13. Summabilität Dirichletscher Reihen. Der in Nr. 2 erwähnte Hauptsatz, daß das Konvergenzgebiet einer *Dirichlet*schen Reihe (1) eine Halbebene $\sigma > \sigma_B$ ist, beruhte auf dem Satze, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ bei festem s mit $\sigma > 0$ eine „konvergenzerhaltende" war; es ist in derselben Weise klar, daß auch das Gebiet, in welchem eine *Dirichlet*sche Reihe (1) nach einer angegebenen Summabilitätsmethode *summabel* ist, ebenfalls eine *Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ sein wird, sobald die betreffende Summabilitätsmethode die Eigenschaft besitzt, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ für $\sigma > 0$ eine „summabilitätserhaltende" ist. Dies ist nach *Bohr*[82]), der die Summabilität *Dirichlet*scher Reihen in Gebieten der komplexen Ebene zuerst untersucht hat[83]), für die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen (2) der Fall, wenn die benutzte Summabilitätsmethode die einfache *Cesàrosche Methode* (C, r) ist, wo r eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet (Artikel II C 4, p. 477 u. f.). Es besitzt also jede *Dirichlet*sche Reihe (2) eine Folge von *Summabilitätsabszissen* $\sigma_B = \sigma^{(0)} \geqq \sigma^{(1)} \geqq \sigma^{(2)} \cdots \geqq \sigma^{(r)} \cdots$ derart, daß die Reihe für $\sigma > \sigma^{(r)}$ summabel (C, r) ist, für $\sigma < \sigma^{(r)}$ dagegen nicht. Bezeichnet $\Omega = \lim\limits_{r \to \infty} \sigma^{(r)}$ die *Summabilitätsgrenzabszisse* der Reihe, so ergibt sich ferner, daß die „Summe" der Reihe *in der ganzen Halbebene* $\sigma > \Omega$ *eine reguläre analytische Funktion* darstellt, so daß wir

82) *H. Bohr,* a) Sur la série de Dirichlet, Paris C. R. 148 (1909), p. 75—80; b) a. a. O. 36); c) Habilitationsschrift, a. a. O. 38); in dieser letzten Arbeit wurde eine zusammenfassende Darstellung der Theorie gegeben.

83) Für *Dirichlet*sche Reihen als Funktionen einer *reellen* Variablen s war die Summabilität schon früher von *G. H. Hardy,* Generalisation of a theorem in the theory of divergent series, London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 255—264 untersucht.

also durch die *Cesàro*sche Summabilität die *analytische Fortsetzung* der durch die Reihe in ihrer Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ bestimmten Funktion über die ganze Summabilitätshalbebene $\sigma > \Omega$ erhalten. Für die in Nr. 1 erwähnten speziellen Reihen (2), deren Koeffizienten den Bedingungen (4) genügen, findet man z. B. $\sigma^{(r)} = -r (r = 0, 1, 2 \ldots)$, also $\Omega = -\infty$; jede dieser Reihen ist also in der ganzen Ebene summabel und definiert somit (was übrigens auf anderem Wege schon bekannt war) eine ganze transzendente Funktion. *Bohr*[82c]) gab ferner explizite Ausdrücke der Summabilitätsabszissen $\sigma^{(r)}$ als Funktionen der Koeffizienten und zeigte, daß diese Abszissen den beiden folgenden Ungleichungen genügen

$$\sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq 1, \quad \sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq \sigma^{(r-1)} - \sigma^{(r)},$$

d. h. die Breite jedes Summabilitätsstreifens ist höchstens 1, und diese Breite kann mit wachsender Summabilitätsordnung r niemals zunehmen; diese beiden Ungleichungen sind ferner die für die Verteilung der Summabilitätsabszissen notwendigen und hinreichenden, in dem Sinne, daß es zu jeder monoton abnehmenden Zahlenfolge $\{\sigma^{(r)}\}$, die diesen Ungleichungen genügt, eine *Dirichlet*sche Reihe (2) gibt, die eben diese Zahlen $\sigma^{(r)}$ als Summabilitätsabszissen besitzt.[84])

M. Riesz[85]), der etwas später als *Bohr*, aber unabhängig von ihm,

---

84) In der bekannten Arbeit von *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood*, Contributions to the arithmetic theory of series, London math. Soc. (2) 11 (1912), p. 411—478 wird u. a. die oben referierte Untersuchung über die Verteilung der Summabilitätsabszissen dadurch verfeinert, daß auch das Summabilitätsverhalten der Reihe in Punkten *auf* den Summabilitätsgeraden $\sigma = \sigma^{(r)}$ selbst betrachtet wird. Zur Charakterisierung der gewonnenen Resultate sei der Satz erwähnt, daß eine Reihe (2), falls sie in einem Punkte $s = \sigma_1$ summabel $(C, r+1)$ und in einem Punkte $s = \sigma_2$ summabel $(C, r-1)$ ist, im Mittelpunkte $s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ summabel (C, r) ist; in diesem Satze ist die obige Ungleichung $\sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq \sigma^{(r-1)} - \sigma^{(r)}$ speziell enthalten. Ferner werden, unter gewissen spezielleren Annahmen über die Größenordnung der Koeffizienten, genauere Sätze über die Lage der Summabilitätsgeraden und das Verhalten der Reihe auf diesen Geraden bewiesen.

85) *M. Riesz*, a) Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 148 (1909), p. 1658—1660; b) Sur la sommation des séries de Dirichlet, Paris C. R. 149 (1909), p. 18—21. Eine zusammenfassende Darstellung der *Riesz*schen Untersuchungen findet sich in dem a. a. O. 1) zitierten Cambridge tract von *G. H. Hardy* und *M. Riesz*. Vgl. auch die Arbeiten von *P. Nalli*, a) Sulle serie di Dirichlet, Palermo Rend. 40 (1915), p. 44—70; b) Aggiunta alla memoria: „Sulle serie di Dirichlet", Palermo Rend. 40 (1915), p. 167—168, und *M. Kuniyeda*, a) Note on Perron's integral and summability-abscissae of Dirichlet's series, Quart. J. 47 (1916), p. 193—219; b) On the abscissa of summability of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 245—262, welche sich nahe an die *Riesz*schen Arbeiten anschließen.

die *Cesàro*-Summabilität der *Dirichlet*schen Reihen untersucht hat, beschränkt sich nicht auf Summabilität ganzzahliger Ordnung und — was wesentlicher ist — betrachtet sogleich die *allgemeinen Dirichletschen Reihen*. *Riesz* mußte daher zunächst das *Cesàro*sche Summabilitätsverfahren so verallgemeinern, daß es auf diesen allgemeineren Reihentypus (1) angewendet werden konnte, und er wurde hierbei auf eine neue bedeutsame Summabilitätsmethode geführt, die von ihm „*Summation nach typischen Mitteln*“ genannt wurde. Schon bei dem Multiplikationssatz in Nr. **12** haben wir gesehen, daß es bei den gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) zweckmäßig sein kann, ein Summabilitätsverfahren zu benutzen, dessen erste Stufe darin besteht, das „logarithmische“ Mittel

$$\frac{C_1(\log 2 - \log 1) + \cdots + C_{n-1}(\log n - \log(n-1))}{\log n}$$

statt des arithmetischen Mittels

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$$

zu bilden. Indem *Riesz* diesen Gedanken ausführt und verallgemeinert, führt er, einer gegebenen *Dirichlet*schen Reihe (1) (oder vielmehr einer gegebenen Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$) entsprechend, *zwei* verschiedene Summationsmethoden ein, deren eine der logarithmischen, die andere der arithmetischen Mittelwertbildung analog ist. Es sei

$$e^{\lambda_n} = l_n, \qquad a_n e^{-\lambda_n s} = a_n l_n^{-s} = c_n,$$

$$C_\lambda(\tau) = \sum_{\lambda_n < \tau} c_n, \qquad C_l(t) = \sum_{l_n < t} c_n$$

und

$$C_\lambda^{(k)}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^k c_n = k\int_0^\omega C_\lambda(\tau)(\omega - \tau)^{k-1}\,d\tau,$$

$$C_l^{(k)}(w) = \sum_{l_n < w} (w - l_n)^k c_n = k\int_0^w C_l(t)(w - t)^{k-1}\,dt,$$

wobei k eine beliebige positive (ganze oder nicht ganze) Zahl bedeutet. Die Ausdrücke

$$\frac{C_\lambda^{(k)}(\omega)}{\omega^k} \quad \text{und} \quad \frac{C_l^{(k)}(w)}{w^k}$$

heißen dann nach *Riesz* die typischen Mittelwerte der k-Ordnung von der ersten bzw. zweiten Art, welche zu der gegebenen Reihe (1) gehören. Wenn nun

$$\frac{C_\lambda^{(k)}(\omega)}{\omega^k} \to C \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{C_l^{(k)}(w)}{w^k} \to C$$

für $\omega \to \infty$ bzw. $w \to \infty$, wird die Reihe (1) *summabel* (λ, k) *bzw.* (l, k) *mit der Summe* C genannt. Die „Kraft“ der Summabilitätsmethode steigt mit wachsender Summabilitätsordnung k, d. h. wenn

eine Reihe summabel (λ, k) bzw. (l, k) ist, so ist sie a fortiori summabel (λ, k') bzw. (l, k') für $k' > k$.

Riesz zeigt nun für eine beliebige Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ bei festem s mit $\sigma > 0$ eine summabilitätserhaltende Faktorenfolge ist, sowohl für die Summabilitätsmethode (λ, k) als für die Methode (l, k), woraus folgt, daß der Gültigkeitsbereich der (einen oder anderen) Summabilitätsmethode eine Halbebene ist. Über die Tragweite der beiden Methoden (λ, k) und (l, k) gegeneinander gilt der Satz: in jedem Punkte s, wo die Reihe (1) summabel (l, k) ist, ist sie gewiß auch summabel (λ, k), so daß (λ, k) die „kräftigere" Methode ist; die Methode (l, k) ist aber „beinahe" ebenso stark, d. h. wenn die Reihe (1) in einem Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ summabel (λ, k) ist, braucht sie wohl nicht im Punkte s_0 selbst summabel (l, k) zu sein, ist es aber in jedem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_0$.

Aus diesen Sätzen folgt, daß zu jeder *Dirichlet*schen Reihe (1) eine *Summabilitätsabszissenfunktion* $\sigma^{(k)}$ $(0 < k < \infty)$ derart existiert, daß die Reihe bei jedem $k > 0$ für $\sigma > \sigma^{(k)}$ summabel (λ, k) und (l, k) ist, während sie für $\sigma < \sigma^{(k)}$ weder summabel (λ, k) noch (l, k) ist.[86]

Für die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen (2) $(\lambda_n = \log n)$ ist die *Riesz*sche Summabilität (l, k) mit der *Cesaro*schen Summabilität (C, k) inhaltsmäßig identisch[87], und es sind somit für diese Reihen (2), und ganzzahlige k, die hier definierte Summabilitätsabszissen $\sigma^{(k)}$ mit den früher besprochenen identisch. Die dort angegebenen Ungleichungen über die Verteilung der Summabilitätsabszissen werden, sogar für den Fall einer *beliebigen Dirichlet*schen Reihe (1), von *Riesz* dahin verallgemeinert, daß die Summabilitätsabszissenfunktion $\sigma^{(k)}$ eine *konvexe* Funktion von k ist.[88] Ferner verallgemeinert *Riesz* die expliziten Ausdrücke für die Summabilitätsabszissen $\sigma^{(k)}$ als Funktionen der Koeffizienten und Exponenten auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) und beliebiges nicht ganzzahliges k.

86) In Punkten *auf* der Summabilitätsgeraden $\sigma = \sigma^{(k)}$ selbst kann es vorkommen (vgl. eine Bemerkung oben), daß die Reihe summabel (λ, k) aber *nicht* (l, k) ist. So ist nach *Riesz*, a. a. O. 85a) und 85b) die Zetareihe $\sum \frac{1}{n^s}$, für welche $\sigma^{(k)} = 1$ für alle k ist, bei keinem k summabel (l, k) in irgendeinem Punkte der Geraden $\sigma = 1$, während sie in jedem Punkte $s \neq 1$ dieser Geraden summabel $(\lambda, 1)$ ist. (Vgl. Note 81.)

87) *M. Riesz*, Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Paris C. R. 152 (1911), p. 1651—1654. Die von *Riesz* angegebene Formulierung der *Cesàro*schen Summationsmethode hat sich bei verschiedenen Anwendungen als wesentlich bequemer als die ursprüngliche Formulierung gezeigt.

88) Der Beweis dieses Satzes wird demnächst in den Acta Univ. hung. Francesco-Jos. erscheinen.

Über den Zusammenhang der Summabilitätseigenschaften einer Reihe (1) mit den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion $f(s)$ gilt zunächst der folgende leicht beweisbare Satz: *Für* $\sigma > \sigma^{(k)} + \varepsilon$ *ist* $f(s) = O(|t|^{k+1})$. Die Frage nach der *Umkehrung* dieses Satzes ist (wie im Falle $k = 0$, d. h. Konvergenz) viel schwieriger; es zeigt sich, daß eine unmittelbare Umkehrung *nicht* gilt, dagegen eine solche, in welcher *der Exponent* $k + 1$ *durch* k *ersetzt wird*, d. h. wenn die durch eine *Dirichlet*sche Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und gleich $O(|t|^k)$ ist, so wird die Summabilitätsabszisse $\sigma^{(k)}$ gewiß $\leqq \sigma_0$ sein. Es geben diese *Riesz*schen Sätze einerseits notwendige und andererseits hinreichende Bedingungen für die Summabilität k^{ter} Ordnung, aber (ganz wie im Falle $k = 0$) keine Bedingungen, die zugleich notwendig und hinreichend sind. Betrachten wir aber den *Grenzwert* Ω der abnehmenden Funktion $\sigma^{(k)}$ (für $k \to \infty$), so können wir aus den obigen Sätzen den folgenden Hauptsatz über die funktionentheoretische Bestimmung dieser *Summabilitätsgrenzabszisse* Ω ableiten: Es ist die Reihe genau so weit summabel (von irgendeiner Ordnung) wie die dargestellte Funktion $f(s)$ regulär und von endlicher Ordnung in bezug auf t ist, d. h. *es ist* Ω *gleich der früher eingeführten Abszisse* σ_ϱ. Dieser Satz wurde, für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2), zuerst von *Bohr*[36]) explizite aufgestellt, der ihn aus einigen, den *Riesz*schen ähnlichen, aber nicht so weitreichenden Sätzen herleitete.[89])

Bei einer näheren Untersuchung zeigt es sich, daß die Einführung der *Cesàro-Riesz*schen Summabilität für fast alle Probleme in der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen von wesentlicher Bedeutung ist, weil dadurch frühere Resultate aus der Konvergenztheorie sich in wichtiger Weise verallgemeinern lassen. Wegen der allgemeinen Durchführung solcher Untersuchungen und der dabei erhaltenen Resultate sei der Leser auf das *Hardy-Riesz*sche Buch verwiesen.[1]) Hier soll nur noch ein besonders interessantes Resultat über die *Multiplikation Dirichlet*scher Reihen erwähnt werden, welches den klassischen Satz von *Cesàro* über Multiplikation von Potenzreihen $(\lambda_n = n)$ auf den allgemeinsten Typus *Dirichlet*scher Reihen (1) verallgemeinert, und so lautet[90]): *Wenn* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ *im Punkte* $s = s_0$ *summabel* (λ, α) *mit*

89) Vgl. auch eine Arbeit von *W. Schnee*, Über den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichletscher Reihen und ihrem funktionentheoretischen Charakter. Acta Math. 35 (1912), p. 357—398, worin der *Landau-Schnee*sche Satz über das Konvergenzproblem (vgl. Nr. 6) von Konvergenz auf Summabilität verallgemeinert wird.

90) *Hardy-Riesz*, a. a. O. 1), p. 64.

der Summe A und $\sum b_n e^{-\mu_n s}$ *im selben Punkte* s_0 *summabel* (μ, β) *mit der Summe B ist, so ist die Produktreihe* $\sum c_n e^{-\nu_n s}$ *im Punkte* s_0 *summabel* $(\nu, \alpha + \beta + 1)$ *mit der Summe AB.* Im speziellen Fall $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir den in Nr. 12 erwähnten Satz über die Multiplikation zweier *konvergenter Dirichlet*scher Reihen.

Außer den *Cesàro-Riesz*schen Methoden wurden auch *andere* Summationsmethoden auf die *Dirichlet*schen Reihen angewendet. So hat *Hardy*[91]) die Wirkung der *Borel*schen Summation auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) geprüft. Auch bei dieser Summationsmethode ist die Zahlenfolge $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}$ $(\sigma > 0)$ eine summabilitätserhaltende Faktorenfolge, und das Summabilitätsgebiet also eine *Halbebene* $\sigma > \sigma^{(B)}$. Diese Halbebene $\sigma > \sigma^{(B)}$ kann aber niemals über die *Cesàro-Riesz*sche Summabilitätshalbebne $\sigma > \Omega$ hinausreichen und braucht nicht immer so weit zu reichen. Anders verhält es sich mit einer anderen von *Hardy*[92]) untersuchten Summabilitätsmethode, der sogenannten *Abel*schen Methode, nach welcher eine Reihe $\sum a_n$ summabel mit der Summe A heißt, wenn die Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ für $0 < x < 1$ konvergiert und die Bedingung $f(x) \to A$ für $x \to 1$ erfüllt. *Hardy* beweist, daß auch hier das Summabilitätsgebiet einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe (2) eine *Halbebene* $\sigma > \sigma^{(A)}$ ist, und daß $\sigma^{(A)}$ einfach die untere Grenze aller Abszissen σ_0 ist, für welche die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ *regulär und gleich* $O(e^{k|t|})$ *mit* $k < \frac{\pi}{2}$ *ist.*[93])

Schließlich ist noch eine schöne Arbeit von *M. Riesz*[94]) zu erwähnen, in welcher es ihm gelungen ist, die bekannten *Mittag-Leffler*schen Resultate über die analytische Darstellung der durch eine

91) *G. H. Hardy,* a. a. O. 72). Vgl. auch *Fekete,* a. a. O. 72) und *G. H. Hardy-J. Littlewood,* The relations between Borel's and Cesàro's method of summation, Proc. London math. Soc. (2) **11** (1913), p. 1—16.

92) *G. H. Hardy,* a) Sur la sommation des séries de Dirichlet, Paris C. R. **162** (1916), p. 463—465; b) a. a. O. 51).

93) Einfache Beispiele *Dirichlet*scher Reihen, bei welchen erst die *Abel*sche Summabilität — also nicht die *Cesàro*sche — imstande ist, die durch die Reihe dargestellte Funktion über die Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ hinaus analytisch fortzusetzen (weil die Funktion für $\sigma < \sigma_B$ stärker als $|t|^k$, aber nicht so stark wie $e^{\frac{\pi}{2}|t|}$ wächst), wurden von *G. H. Hardy,* a) a. a. O. 92) und b) Example to illustrate a point in the theory of Dirichlet's series, Tôhoku J. **8** (1915), p. 59—66, angegeben.

94) *M. Riesz,* Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet, Acta Math. **35** (1912), p. 253—270.

Potenzreihe ($\lambda_n = n$) definierten Funktion in ihrem Hauptstern auf den allgemeinen Reihentypus (1) zu übertragen. *Riesz* beweist u. a. den folgenden Satz: Es habe die *Dirichlet*sche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei H der *Hauptstern* der durch die Reihe definierten Funktion $f(s)$, d. h. das Gebiet, welches aus der s-Ebene entsteht, wenn alle mit der negativen reellen Achse parallelen Halbgeraden, die von den singulären Punkten von $f(s)$ ausgehen, entfernt werden. Dann gilt *im ganzen Hauptstern die Darstellung* $f(s) = \lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(s)$, *wo* $\varphi_\alpha(s)$ *die (ganze transzendente) Funktion*

$$\varphi_\alpha(s) = \sum \frac{1}{\Gamma(\alpha\lambda_n + 1)} a_n e^{-\lambda_n s}$$

bezeichnet. Auch die von *Mittag-Leffler* benutzten *Integraldarstellungen* zur analytischen Fortsetzung einer durch eine gegebene Potenzreihe ($\lambda_n = n$) definierten Funktion wurden von *Riesz* auf die *Dirichlet*schen Reihen übertragen.

II. Die Riemannsche Zetafunktion.

14. Die Zetafunktion und ihre Funktionalgleichung. Die Zetafunktion wird (vgl. Nr. **1**) durch die *Dirichlet*sche Reihe

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \tag{21}$$

definiert. Obwohl schon *Euler* diese Funktion betrachtet und ihre zahlentheoretische Bedeutung erkannt hat, wird sie doch gewöhnlich als die „*Riemann*sche" Zetafunktion bezeichnet, weil *Riemann* sie zuerst in seiner berühmten Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen [95]), welche auch für die Entwicklung der neueren Funktionentheorie von fundamentaler Bedeutung gewesen ist, einem tiefergehenden Studium unterworfen hat. Über die Bedeutung der Zetafunktion für das Primzahlproblem sei in diesem Kapitel, das sich ausschließlich mit den rein funktionentheoretischen Eigenschaften von $\zeta(s)$ beschäftigen soll, nur bemerkt, daß sie in der *Eulerschen Identität*

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod \frac{1}{1 - p_m^{-s}}, \tag{22}$$

wo p_m die Primzahlen durchläuft, wurzelt; diese *Euler*sche Produktdarstellung spielt übrigens auch (vgl. z. B. Nr. **17**) bei manchen funktionentheoretischen Untersuchungen von $\zeta(s)$ eine bedeutsame Rolle.

Die die Zetafunktion definierende Reihe (21) konvergiert nur in der Halbebene $\sigma > 1$, und auch das Produkt (22) ist für $\sigma < 1$ divergent und gibt somit keinen Aufschluß über die Möglichkeit analyti-

95) *B. Riemann,* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Monatsber. Akad. Berlin 1859, p. 671—680 = Werke (2. Aufl.), p. 145—153.

scher Fortsetzung über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus. Anders verhält es sich mit der in Nr. **11** erwähnten Integraldarstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx;$$

in der Tat, es läßt sich dieses zunächst ebenfalls nur für $\sigma > 1$ brauchbare Integral als ein komplexes Kurvenintegral

$$(23) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}} \int_W \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi} \int_W \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\, dx$$

schreiben, wo der Integrationsweg W eine Schleife ist, die vom Punkte $x = +\infty$ ausgeht und nach einem einmaligen Umkreisen des Punktes $x = 0$ zum Punkte $x = +\infty$ zurückkehrt. Aus dieser Integraldarstellung, die offensichtlich für jedes s konvergiert, schloß *Riemann*, daß die Funktion $\zeta(s)\Gamma(s)\sin \pi s$ eine ganze Transzendente ist, und hieraus weiter, *daß $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene als eine eindeutige Funktion existiert, die überall regulär ist mit Ausnahme des einzigen Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung (mit dem Residuum 1) besitzt.*

Aus der Darstellung (23) leitete *Riemann* des weiteren durch eine Deformation des Integrationsweges und Anwendung des *Cauchy*schen Satzes eine fundamentale Eigenschaft der Zetafunktion ab, nämlich daß sie der *Funktionalgleichung*

$$(24) \qquad \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(s)\zeta(s)$$

genügt[96]), oder anders ausgedrückt, daß die Funktion

$$\eta(s) = \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

ungeändert bleibt, wenn die Variable s durch $1 - s$ ersetzt wird. Für die Funktionalgleichung in dieser letzten Form: $\eta(s) = \eta(1-s)$ und gleichzeitig auch für die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene[97])

96) Nach *E. Landau,* Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Bibl. Math. (3) 7 (1906—7), p. 69—79 war diese Funktionalgleichung schon *Euler* bekannt.

97) Außer den beiden, von *Riemann* selbst herrührenden, Beweisen des Satzes, daß $\zeta(s)$ von der Definitionshalbebene $\sigma > 1$ aus in die ganze Ebene fortgesetzt werden kann, gibt es eine Menge anderer Beweise dieses Satzes. So hat z. B. *J. L. W. V. Jensen,* Interméd. math. 1 (1895), p. 346—347 verschiedene Integraldarstellungen für $\zeta(s)$ angegeben, aus welchen die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene unmittelbar ersichtlich ist; vgl. hierzu auch *E. Lindelöf,* Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions (Collection Borel), Paris 1905, p. 1—141. Ein anderer Beweis von *Jensen,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de

hat *Riemann*[95]) auch einen anderen Beweis gegeben, welcher sich bei der Anwendung auf mit der Zetafunktion verwandte Funktionen als sehr verallgemeinerungsfähig erwiesen hat. *Riemann* geht hierbei vom Integral

$$\frac{1}{n^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx$$

aus und erhält durch Summation die Formel

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\,\omega(x)\,dx, \qquad (\sigma > 1) \tag{25}$$

wo $\omega(x)$ die Reihe

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$$

bezeichnet. Nun ist aber, nach einer bekannten Formel aus der Theorie der elliptischen Thetafunktionen,

$$1 + 2\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + 2\omega\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad (x > 0)$$

woraus sich durch Einsetzen in (25) und eine leichte Rechnung die Formel

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} - \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)\,dx \tag{26}$$

Riemann, Paris C. R. 104 (1887), p. 1156—1159 beruht auf einer Relation zwischen den unendlich vielen Gliedern der Folge $\zeta(s)$, $\zeta(s+1)$, $\zeta(s+2), \ldots$; ähnliche Relationen, welche überdies die Eigenschaft besitzen, in sich als Definitionsgleichungen der Zetafunktion gelten zu können, wurden später von *J. Hadamard,* Sur une propriété fonctionelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Bull. Soc. math. France 37 (1909), p. 59—60, angegeben. *Ch. de la Vallée Poussin,* Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, Mém. Acad. Belgique 53 (1895—96), No. 6, p. 1—32, beweist den Satz durch Vergleich der Reihe $\sum \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ mit dem entsprechenden Integral $\int_1^\infty \frac{du}{u^s} = \frac{1}{s-1}$, indem er (durch partielle Integrationen) nachweist, daß die Differenz $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ eine ganze Transzendente ist; die Idee dieser Beweismethode ist von *H. Cramér,* Sur une classe de séries de Dirichlet, Diss. Upsala (Stockholm 1917), p. 1—51, zur Untersuchung beliebiger *Dirichlet*scher Reihen verallgemeinert. Setzt man die Theorie der *Cesàro*schen Summabilität *Dirichlet*scher Reihen (vgl. Nr. 13) als bekannt voraus, dürfte der einfachste Beweis für die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene wohl derjenige sein, daß man die Funktion $\zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ betrachtet, welche durch die in der ganzen Ebene summable Reihe $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ dargestellt wird und somit sich sofort als eine ganze Transzendente erweist.

ergibt, welche sofort erkennen läßt, daß die auf der linken Seite stehende Funktion eine ganze Transzendente ist, die ungeändert bleibt, wenn s durch $1 - s$ ersetzt wird.[98])

Die Funktionalgleichung (24) verbindet die Werte der Zetafunktion in zwei Punkten s und $1 - s$, welche in bezug auf den Punkt $\frac{1}{2}$ symmetrisch gelegen sind. Hieraus folgt, daß man das Studium der Zetafunktion wesentlich auf die Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ beschränken kann (übrigens sogar auf die Viertelebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $t \geqq 0$, da $\zeta(s)$ in konjugierten Punkten konjugierte Werte annimmt); denn die Funktionalgleichung erlaubt ja das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < \frac{1}{2}$ aus dem Verhalten der Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ abzulesen. So können wir z. B. aus der aus der *Euler*schen Identität (22) unmittelbar folgenden Tatsache, daß $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ *überall von* 0 *verschieden* ist, mittels der Funktionalgleichung (24) sofort die Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < 0$ bestimmen; in der Tat, es folgt ja aus (24), daß diese Nullstellen mit den Nullstellen der Funktion $1 : \left\{\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\right\}$ für $\sigma < 0$ übereinstimmen, d. h. daß $\zeta(s)$ *in der besprochenen Halbebene* $\sigma < 0$ *Nullstellen* (*einfache*) *in den Punkten* $s = -2, -4, -6, \ldots$ und nur in diesen Punkten besitzt. Es werden diese Nullstellen gewöhnlich als die „trivialen" Nullstellen von $\zeta(s)$ bezeichnet, im Gegensatze zu den (in Nr. **15** zu erwähnenden) „nichttrivialen" Nullstellen im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Diese letzten Nullstellen liegen übrigens alle im *Innern* des Streifens $0 < \sigma < 1$; denn wie *de la Vallée Poussin*[99]) und *Hadamard*[100]) unabhängig von ein-

98) *H. Hamburger*, a) Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 240—254; 11 (1922), p. 224—245; 13 (1922), p. 283—311; b) Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, Math. Ann. 85 (1922), p. 129—140, beweist, daß $\zeta(s)$ bis auf einen konstanten Faktor *eindeutig* bestimmt ist durch die folgenden Eigenschaften: sie ist eine meromorphe Funktion mit nur endlich vielen Polen, die 1. der Funktionalgleichung (24) genügt, 2. für $|s| \to \infty$ gleich $O(e^{|s|^k})$ und 3. für $\sigma > 1$ durch eine absolut konvergente *Dirichlet*sche Reihe $\sum \frac{a_n}{n^s}$ darstellbar ist. Im Laufe des Beweises dieses Satzes [durch welchen eine Fragestellung von *J. Hadamard,* a. a. O. 60) behandelt wird] gibt *Hamburger* einen neuen Beweis der *Riemann*schen Funktionalgleichung. Vgl. auch *C. Siegel,* Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86 (1922), p. 276—279.

99) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Ann. soc. sc. Bruxelles 20² (1896), p. 183—256 und p. 281—397.

100) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. Soc. math. France **24** (1896), p. 199—220.

ander durch sinnreiche Überlegungen bewiesen haben, ist *die Gerade* $\sigma = 1$ (*und daher auch die Gerade* $\sigma = 0$) *nullpunktsfrei*. In diesem Zusammenhange sei noch erwähnt, daß *Mertens*[101]) schon früher durch eine interessante Abschätzung bewiesen hatte, daß das *Euler*sche Produkt (22) in jedem Punkte $s \neq 1$ auf der Geraden $\sigma = 1$, in welchem $\zeta(s) \neq 0$ ist (also nach dem obigen Satze in den sämtlichen Punkten $s \neq 1$) noch konvergiert; mit Hilfe des in Nr. 5 besprochenen *Riesz*schen Konvergenzsatzes (auf $\log \zeta(s)$ verwendet) läßt sich dieses Resultat[102]), oder was damit gleichbedeutend ist, die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{p_m^{1+it}}$ für alle $t \gtrless 0$, unmittelbar ohne jede spezielle Abschätzung aus dem Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ ableiten.

15. Die Riemann-Hadamardsche Produktentwicklung. Betrachten wir mit *Riemann* die Funktion[103])

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s),$$

welche eine ganze Transzendente ist, deren Nullstellen mit den nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ übereinstimmen (indem die trivialen Nullstellen weggeschafft sind), und die der Gleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ genügt. Die durch diese Funktionalgleichung ausgedrückte Eigenschaft kann auch dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß die Funktion $\Xi(z)$, welche aus $\xi(s)$ durch die Transformation $s = \frac{1}{2} + iz$ entsteht, eine *gerade* Funktion von z ist, d. h. eine Funktion von z^2, die wir mit $g(z^2)$ bezeichnen werden, wo also $g(x)$ eine ganze Funktion von x ist. Jedem Nullstellenpaar $\pm \lambda$ von $\Xi(z)$, d. h. jedem Nullstellenpaar ϱ und $1 - \varrho$ von $\zeta(s)$ entspricht also nur eine einzige Nullstelle $\mu = \lambda^2$ von $g(x)$. Über diese Funktion $g(x)$ behauptete *Riemann*[95]), daß sie unendlich viele Nullstellen μ_n hat — also daß die Zetafunktion unendlich viele nichttriviale Nullstellen besitzt — und ferner, daß sie durch das Produkt

$$g(x) = g(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\mu_n}\right) \tag{27}$$

101) *F. Mertens*, Über die Konvergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe, Gött. Nachr. 1887, p. 265—269.

102) Vgl. *E. Landau*, a. a. O. 21).

103) Die folgenden Bezeichnungen der Funktionen sind die von *E. Landau* benutzten (und jetzt üblichen), welche von den *Riemann*schen etwas abweichen. Die von *Riemann* mit ξ bezeichnete Funktion ist die unten erwähnte Funktion Ξ.

dargestellt werden kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung wurde bekanntlich zuerst von *Hadamard*[104]) durch seine grundlegenden Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen endlichen Geschlechtes bewiesen. Es ist nämlich, wie leicht zu zeigen,

$$g(x) = O\left(e^{|x|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon > 0)$$

und nach einem allgemeinen Satz der *Hadamard*schen Theorie folgt aus dieser Abschätzung sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung.[105]) Wie oben erwähnt, entsprechen jeder Nullstelle μ_n von $g(x)$ zwei Nullstellen von $\zeta(s)$, nämlich $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\mu_n}$, welche symmetrisch in bezug auf den Punkt $\frac{1}{2}$ liegen. Wird die Produktentwicklung (27) von $g(x)$ zu einer Produktentwicklung der Funktion $\zeta(s)$ selbst umgeschrieben, so findet man — indem der Bequemlichkeit halber Konvergenzfaktoren hinzugefügt werden, die das Produkt von der Reihenfolge der Faktoren (d. h. von dem paarweisen Zusammennehmen zweier „entsprechender" Nullstellen ϱ und $1-\varrho$) unabhängig machen — die grundlegende Formel

$$(28) \qquad (s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{\varrho} \left(1-\frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

wo ϱ die sämtlichen nichttrivialen Nullstellen durchläuft, und b eine Konstante ($b = \log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}C$, wo C die *Euler*sche Konstante ist) bezeichnet. In der Primzahlentheorie kommt diese Formel (28) meistens in der Form

$$(29) \qquad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

zur Anwendung.

Es sei schon hier erwähnt, daß *Riemann*[95]) des weiteren die Vermutung ausgesprochen hat — aber mit ausdrücklicher Hervorhebung, daß er diese Vermutung nicht beweisen konnte — daß die Nullstellen von $g(x)$ alle *reell* sind, d. h. *daß die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ alle auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.* Ob diese berühmte „*Riemann*sche Vermutung" richtig ist oder nicht, ist bekanntlich noch heute unentschieden, und man weiß auch nicht, durch welche Ar-

---

104) *J. Hadamard,* Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. de math. (4) 9 (1893), p. 171—215.

105) In dem ursprünglichen *Hadamard*schen Beweise wird übrigens nicht die Größenordnung der Funktion $g(x)$ selbst, sondern — was nach *Hadamard* auf genau dasselbe hinauskommt — die Größenordnung der Koeffizienten a_n der Potenzreihe $g(x) = \sum a_n x^n$ abgeschätzt.

gumente (abgesehen von der *symmetrischen Lage der Nullstellen in bezug auf die Gerade* $\sigma = \frac{1}{2}$) *Riemann* auf diese Vermutung geführt worden ist.

16. Die Riemann-v. Mangoldtsche Formel für die Anzahl der Nullstellen. Über die nähere Verteilung der Ordinaten der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ hat *Riemann*[95]) ohne Beweis eine Formel angegeben, die viel präziser ist als diejenigen Resultate, welche man aus der *Hadamard*schen Theorie direkt entnehmen kann, nämlich die Formel

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T), \tag{30}$$

wo $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t \leqq T$ bezeichnet. Es gelang erst *v. Mangoldt*[106]), diese Formel streng zu beweisen. Betreffs des Beweises sei nur erwähnt, daß man von dem Ausdruck $N(T) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ ausgehend, wo das Integral längs des Randes eines Rechteckes mit den Eckpunkten 2, $2 + iT$, $-1 + iT$, -1 erstreckt ist, durch einfache Rechnungen (unter Benutzung der Funktionalgleichung der Zetafunktion und bekannter Eigenschaften der Gammafunktion) leicht findet, daß

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + R(T) \tag{31}$$

ist, wo das Restglied $R(T) = O(1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2+iT}^{-1+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$, und daß die ganze, erst von *v. Mangoldt* überwundene Schwierigkeit darin liegt, dies letzte Integral, welches den „kritischen" Streifen $0 < \sigma < 1$ durchsetzt, abzuschätzen. Der *v. Mangoldt*sche Beweis der Ungleichung $R(T) = O(\log T)$, wie auch ein später vereinfachter von *Landau*[107]), stützt sich wesentlich auf die *Hadamard*schen Resultate, d. h. auf die Produktentwicklung von $\zeta(s)$. Vor einigen Jahren wurde ein sehr eleganter Beweis dieser Ungleichung von *Backlund*[108]) gefunden, der

106) *H. v. Mangoldt,* Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$, Math. Ann. 60 (1905), p. 1—19. Schon früher hatte *v. Mangoldt* [zu *Riemanns* Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Crelles J. 114 (1895), p. 255—305] die Formel (30) mit einem Restgliede $O(\log^2 T)$ (statt $O(\log T)$) bewiesen.

107) *E. Landau,* Über die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen, Math. Ann. 66 (1909), p. 419—445.

108) *R. Backlund,* a) Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1979—1981; b) Über die Nullstellen der Riemannschen Zeta-

nicht die Produktentwicklung (28), sondern nur eine ganz grobe Abschätzung von $\zeta(s)$ benutzt.

Ob die Abschätzung $R(T) = O(\log T)$ verbessert werden kann, weiß man nicht (vgl. jedoch Nr. **20**, wo über Folgerungen der „*Riemann*schen Vermutung" berichtet wird); dagegen weiß man nach *Cramér*[109]), daß der *Mittelwert* $\frac{1}{T}\int_0^T R(t)\,dt$ beschränkt ist, sogar daß er für $T \to \infty$ einem bestimmten Grenzwert, nämlich dem Werte $\frac{7}{8}$, zustrebt.[110]) Verfeinerte Resultate dieser Art sind neulich von *Littlewood*[111]) angegeben.

17. Über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 (> \frac{1}{2})$. Betrachten wir zunächst die Halbebene $\sigma > 1$; da $\zeta(s)$ hier $\neq 0$ ist, ist es ein natürlicheres (und allgemeineres) Problem, nach den Werten von $\log \zeta(s)$, statt nach den Werten von $\zeta(s)$ selbst zu fragen, wo $\log \zeta(s)$ z. B. denjenigen (für $\sigma > 1$ regulären) Zweig des Logarithmus der Zetafunktion bezeichnet, der für reelles $s > 1$ reell ist. Dieser Zweig ist, nach der *Euler*schen Identität (22) durch

$$(32) \qquad \log \zeta(s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \log(1 - p_m^{-s}) \qquad (\sigma > 1)$$

gegeben, also (wenn $\log(1 - p_m^{-s})$ in eine Potenzreihe entwickelt wird) durch eine *Dirichlet*sche Reihe, in welcher die einzelnen Primzahlen separiert sind. Durch diesen Umstand wird es möglich, das in Nr. **7** angegebene Verfahren, welches auf der Theorie diophantischer Approximationen beruht, in einfacher Weise durchzuführen, indem die dort mit $M(\sigma_0)$ bezeichnete Wertmenge explizite bestimmt werden

---

funktion, Dissertation Helsingfors 1916, p. 1—24; c) Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 41 (1918), p. 345—375.

109) *H. Cramér*, Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 104—130.

110) Daß der Grenzwert gerade den Wert $\frac{7}{8}$ hat, hängt damit zusammen, daß $R(T)$ auf die Form $R(T) = \frac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi} \Delta \arg \zeta(s)$ gebracht werden kann (*Backlund*, a. a. O. 108c), wo die Konstante $\frac{7}{8}$ von der Gammafunktion und den anderen in der Funktionalgleichung eingehenden elementaren Funktionen herrührt, während $\Delta \arg \zeta(s)$ den Zuwachs von $\arg \zeta(s)$ angibt, wenn s den gebrochenen Linienzug 2, $2 + iT$, $\frac{1}{2} + iT$ durchläuft.

111) *J. E. Littlewood*, Researches in the theory of the Riemann ζ-function, Proc. London math. Soc. 20 (1922), (Records et cet. p. XXII—XXVIII). In dieser kurzen Mitteilung wird, ohne Beweise, eine Reihe sehr tiefgehender Sätze über $\zeta(s)$ angegeben.

kann. Es ergibt sich, daß diese Menge $M(\sigma_0)$ ein endliches Gebiet (in der komplexen Ebene) ist, das je nach der Lage der Abszisse $\sigma_0 (> 1)$ von einer oder von zwei konvexen Kurven begrenzt wird. Bei festem σ_0 läuft nun (nach Nr. 7) die von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ beschriebene Kurve im Gebiete $M(\sigma_0)$ überall dicht herum, und es ist die Menge der Werte, welche $\log \zeta(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, mit $M(\sigma_0)$ identisch. Für σ_0 nahe an 1 ist $M(\sigma_0)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet (d. h. nur von einer Kurve begrenzt), das sich für $\sigma_0 \to 1$ nach und nach über die ganze Ebene ausbreitet[112]); hiermit ist speziell gefunden, daß $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert unendlich oft annimmt, also a fortiori, *daß* $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ (übrigens sogar in jedem Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$) *sämtliche Werte außer* 0 *unendlich oft annimmt.*[113])

Wesentlich schwieriger ist die Bestimmung der Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$, welche im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ liegt, weil das *Euler*sche Produkt, das ja die Quelle der obigen Untersuchung war, für $\sigma < 1$ divergiert (und für $\sigma = 1$, $t \neq 0$ nur bedingt konvergiert). Die auf der Theorie der diophantischen Approximationen beruhende Untersuchungsmethode läßt sich aber, obwohl in einer wesentlich modifizierten Form, auch hier verwenden[114]), und es ergibt sich, daß $\zeta(s)$ auf jeder festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$

---

112) *H. Bohr,* Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$, Paris C. R. 154 (1912), p. 1078—1081. Die genaue Ausführung der betreffenden geometrischen Überlegungen findet sich in der Abhandlung: Om Addition af uendelig mange konvekse Kurve, Overs. Vidensk. Selsk. Köbenhavn 1913, p. 326—366. Die entsprechende Untersuchung der (bei den zahlentheoretischen Anwendungen wichtigen) Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ findet sich bei *H. Bohr*, Über die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, Crelles J. 141 (1912), p. 217—234; die Untersuchung gestaltet sich hier wesentlich einfacher, weil die (konvexen) Begrenzungskurven der Gebiete $M(\sigma_0)$ einfach Kreise werden.

113) Über einen Beweis dieses letzteren (spezielleren) Resultates siehe *H. Bohr,* Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, Gött. Nachr. 1911, p. 409—428. Schon früher hatten *H. Bohr* und *E. Landau*, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Gött. Nachr. 1910, p. 303—330 mit Hilfe allgemeiner funktionentheoretischer Methoden den weniger aussagenden Satz bewiesen, daß $\zeta(s)$ in jedem Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ alle Werte, höchstens mit einer einzigen Ausnahme, annimmt.

114) Hierbei spielt eine von *H. Weyl* (Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), p. 313—352) herrührende Verschärfung des in Nr. 7 erwähnten *Kronecker*schen Satzes über diophantische Approximationen eine wesentliche Rolle.

Werte annimmt, die *in der ganzen Ebene überall dicht* liegen[115]), und ferner, daß die Menge der Werte von $\zeta(s)$ in unendlicher Nähe einer solchen Geraden gewiß *sämtliche Werte, höchstens mit Ausnahme des einen Wertes* 0, *enthält.*[116]) Bei der besonders wichtigen Frage, ob auch der „kritische" Wert 0 angenommen wird oder nicht — also ob die „*Riemann*sche Vermutung" falsch oder richtig ist — versagt aber die Methode, und sie vermag nur (weil sie im Grunde eine Wahrscheinlichkeitsmethode ist) zu zeigen, daß, falls 0 in einem Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ überhaupt angenommen wird, 0 jedenfalls „unendlich seltener" angenommen wird als jeder andere Wert a, d. h. wenn $N_0(T)$ und $N_a(T)$ die Anzahl von 0-Stellen bzw. a-Stellen im Rechteck $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta,\ 0 < t < T$ bezeichnen, so gilt für $T \to \infty$ die Gleichung $\lim N_0(T) : N_a(T) = 0$.[116])

18. Über die Größenordnung der Zetafunktion auf vertikalen Geraden. Man findet sehr leicht, daß $\zeta(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ von endlicher Größenordnung in bezug auf t ist, und es läßt sich daher im ganzen Intervalle $-\infty < \sigma < \infty$ eine endliche *Größenordnungsfunktion* $\mu(\sigma)$ definieren (vgl. Nr. 6) als die untere Grenze aller Zahlen α, für welche $\zeta(\sigma + it)$ bei festem σ gleich $O(|t|^\alpha)$ ist. Die Funktionalgleichung (24) liefert die Relation $\mu(\sigma) = \mu(1-\sigma) + \frac{1}{2} - \sigma$, und es genügt somit $\mu(\sigma)$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ zu untersuchen. Für $\sigma > 1$ ist $\mu(\sigma) = 0$ (es ist sogar $|\zeta(s)|$ und $\frac{1}{|\zeta(s)|}$ beschränkt auf jeder vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 > 1$). Die Schwierigkeit besteht darin, $\mu(\sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ zu bestimmen. Nachdem zuerst *Mellin* und später *Landau* gewisse Abschätzungen der μ-Funktion gewonnen hatten[117]), gelang es

115) *H. Bohr* und *R. Courant,* Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, Crelles J. 144 (1914), p. 249–274.

116) *H. Bohr,* a) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1986—1988; b) Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen, Acta Math. 40 (1915), p. 67—100.

Schon früher hatten *H. Bohr* und *E. Landau,* Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 74 (1913), p. 3—30 durch Überlegungen ganz anderer Art gezeigt, daß unter Annahme der Richtigkeit der „Riemannschen Vermutung" die Wertmenge von $\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ $(\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1)$ alle Werte außer 0 enthält.

117) *H. Mellin,* Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlechte, Acta Soc. Sc. Fenn. 29 (1900), No. 4, p. 1—50, bewies, daß $\mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$, und *E. Landau,* Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 229—241 verschärfte dieses Resultat zu $\mu(\sigma) \leqq \frac{3}{4}(1-\sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$.

Lindelöf[118]) durch allgemeine funktionentheoretische Betrachtungen zu beweisen (vgl Nr. **6**), *daß* $\mu(\sigma)$ *eine stetige konvexe Funktion von* σ *ist,* woraus sofort folgt, wegen $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > 1$ und $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ für $\sigma < 0$), daß die μ-Kurve für $0 \leqq \sigma \leqq 1$ im Dreieck mit den Endpunkten $(0, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 0)$ $(1, 0)$ verläuft, also speziell, daß $\mu(\sigma) \leqq \frac{1}{2}(1 - \sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$. Ganz neuerdings ist es *Hardy* und *Littlewood*[119]) gelungen, über das *Lindelöf*sche Resultat hinauszukommen, und zwar u. a. zu beweisen, daß die μ-Kurve im Punkte $\sigma = 1$ die Abszissenachse berührt. Der genaue Verlauf der μ-Funktion für $0 < \sigma < 1$ ist noch heute unbekannt (vgl. jedoch Nr. **20**).

Ein besonderes Interesse bietet die Untersuchung der Größenverhältnisse von $\zeta(s)$ $\left(\text{und } \frac{1}{\zeta(s)}\right)$ *auf der Geraden* $\sigma = 1$, die den kritischen Streifen von der „trivialen" Halbebene $\sigma > 1$ trennt, und wo $\zeta(s)$ (nach Nr. **17**) „zum ersten Mal" Werte annimmt, die in der ganzen Ebene überall dicht liegen. Über das Resultat $\mu(1) = 0$, d. h. $\zeta(1 + it) = O(t^\varepsilon)$ hinaus, bewies *Mellin*[120]) das viel schärfere Resultat $\zeta(1 + it) = O(\log t)$, und mit Hilfe tiefgehender Untersuchungen über diophantische Approximationen haben später *Hardy-Littlewood*[121]) und *Weyl*[122]) die *Mellin*sche Abschätzung zu $\zeta(1 + it) = o(\log t)$ und *Weyl* sogar zu

$$\zeta(1 + it) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) \tag{33}$$

verschärfen können. Andererseits haben *Bohr* und *Landau*[123]) ebenfalls mit Hilfe diophantischer Approximationen bewiesen, daß

$$\zeta(1 + it) \neq o(\log\log t) \tag{34}$$

ist. Die Frage nach der „wahren" Größenordnung von $\zeta(1 + it)$ ist aber hiermit noch lange nicht gelöst (vgl. jedoch Nr. **20**), denn es besteht ja noch eine beträchtliche Lücke zwischen (33) und (34). Die entsprechende Frage über $1 : \zeta(1 + it)$ ist noch weniger aufgeklärt. Nachdem es zuerst *Mertens*[124]), durch eine neue Beweisanordnung des

118) *E. Lindelöf,* Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$, Bull. Sc. math. (2) 32 I (1908), p. 341—356.

119) Vgl. *J. Littlewood,* a. a. O. 111).

120) *H. Mellin,* a. a. O. 117).

121) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood,* Some problems of diophantine approximation, Internat. Congr. of math. Cambridge 1 (1912), p. 223—229.

122) *H. Weyl,* Zur Abschätzung von $\zeta(1 + it)$, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 88—100.

123) *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 113).

124) *F. Mertens,* Über eine Eigenschaft der Riemannschen ζ-Funktion, Sitzungsber. Acad. Wien 107, II^a (1898), p. 1429—1434.

*Hadamard-de la Vallée Poussin*schen Satzes: $\zeta(1+it) \neq 0$, gelungen war, eine obere Grenze $\varphi(t)$ für $\frac{1}{|\zeta(1+it)|}$ explizite anzugeben, fand *Landau*[125]) die für seine zahlentheoretischen Zwecke wichtige Abschätzung $1:\zeta(1+it) = O\{(\log t)^c\}$, die von *Landau* selbst[29]) auf $O(\log t \cdot \log\log t)$, dann von *Gronwall*[126]) auf $1:\zeta(1+it) = O(\log t)$ und neuerdings von *Littlewood*[111]) auf

$$1:\zeta(1+it) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)$$

verschärft wurde; andererseits weiß man aber nur, nach *Bohr*, daß

$$1:\zeta(1+it) \neq O(1)$$

ist, also daß $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ beliebig kleine Werte annimmt[127])), ohne daß man bis jetzt imstande gewesen ist, irgendeine mit t ins Unendliche wachsende Funktion $\psi(t)$ explizite anzugeben, für die $1:\zeta(1+it) \neq O(\psi(t))$ ist.

Obwohl $\zeta(s)$ auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0 \leqq 1$ beschränkt bleibt, ist sie doch bei jedem σ_0 im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *im Mittel* beschränkt, ja es ist sogar ihr Quadrat im Mittel beschränkt; denn aus dem *Schnee*schen Mittelwertsatze (Nr. 9) ergibt sich leicht[128]), daß

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt = \sum \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma). \qquad (\tfrac{1}{2} < \sigma < 1)$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung, daß für $\sigma < \frac{1}{2}$ der Mittelwert $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$ sich asymptotisch wie

$$\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}\cdot T^{1-2\sigma}$$

verhält. Viel schwieriger ist das Problem des Verhaltens von $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$ für $\sigma = \frac{1}{2}$; dieses wurde von *Hardy* und *Little-*

125) *E. Landau,* Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), p. 645—670.

126) *T. Gronwall,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann au voisinage de $\sigma = 1$, Palermo Rend. 35 (1913), p. 95—102.

127) Ein direkter Beweis dieses Satzes (der ja als Spezialfall in dem in Nr. 17 erwähnten Resultate über $\zeta(1+it)$ enthalten ist) findet sich bei *H. Bohr,* Sur l'existence de valeurs arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma+it)$ de Riemann pour $\sigma > 1$, Oversigt. Vidensk. Selsk. Kóbenhavn 1911, p. 201—208. Vgl. auch *H. Bohr,* Note sur la fonction Zéta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma+it)$ sur la droite $\sigma = 1$, Oversigt Vidensk. Selsk. Kóbenhavn 1913, p. 3—11.

128) Vgl. z. B. *E. Landau,* Handbuch, a. a. O. 1), § 228.

wood gelöst[31b]), und zwar mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt \sim \log T.$$

Neuerdings haben *Hardy* und *Littlewood*[129]) bewiesen, daß auch $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^4 dt$ bei festem σ im Intervalle $\frac{1}{2}<\sigma<1$ beschränkt bleibt und sogar für $T\to\infty$ einem bestimmten Grenzwerte zustrebt. Der Beweis basiert auf der von *Hardy* und *Littlewood*[129]) entdeckten sogenannten „*approximativen Funktionalgleichung*", welche besagt, daß für $|\sigma|<k$, $x>K$, $y>K$ und $2\pi xy=|t|$

$$\zeta(s)=\sum_{n<x}\frac{1}{n^s}+\chi\sum_{n<y}\frac{1}{n^{1-s}}+R,$$

wo $\chi=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)$ und $R=O(x^{-\sigma})+O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma})$. Diese Formel, welche bei Abschätzungen der Zetafunktion im kritischen Streifen $0<\sigma<1$ von der größten Bedeutung ist, ist[129]) eine Art „Kompromiß zwischen der für $\sigma>1$ gültigen Formel $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$ und der für $\sigma<0$ gültigen Formel $\zeta(s)=\chi\sum\frac{1}{n^{1-s}}$".

Die oben erwähnten Mittelwertsformeln und andere ähnliche, die sich durch Anwendung des *Schnee*schen Mittelwertsatzes auf mit der Zetareihe beschlechtete *Dirichlet*sche Reihen abgeleitet werden, spielen bei neueren Untersuchungen über die Zetafunktion eine immer wichtigere Rolle.

19. Näheres über die Nullstellen im kritischen Streifen. Aus dem Satze (Nr. **14**), daß keine Nullstelle von $\zeta(s)$ *auf* der Geraden $\sigma=1$ gelegen ist, folgt sofort, daß für eine mit $t\to\infty$ „hinreichend" schnell zu 0 abnehmende Funktion $\varphi(t)$ der asymptotisch unendlich schmale Streifen $1\geqq\sigma>1-\varphi(t)$ ebenfalls nullpunktsfrei ist. Mit Hilfe der *Hadamard*schen Produktentwicklung von $\zeta(s)$ gelang es *de la Vallée Poussin*[130]), und später durch elementarere Mittel *Landau*[125]), eine solche Funktion $\varphi(t)$ explizite anzugeben; das *de la Vallée Poussin*-

129) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood*, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London math. Soc. 21 (1922), p. 39—74.

130) *Ch. de la Vallée Poussin*, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. Acad. Belgique 59, No. 1 (1899—1900), p. 1—74.

sche Resultat, welches das genauere war, besagt, daß $\frac{k}{\log t}$ (bei passender Wahl von $k > 0$) eine zulässige Funktion $\varphi(t)$ ist. Ganz neuerdings hat *Littlewood*[111]) dieses dahin verschärft, daß $\varphi(t) \sim \frac{k \log\log t}{\log t}$ angenommen werden darf. Ob es aber eine Konstante $\sigma_0 < 1$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$, ist immer noch unentschieden.

Wie in Nr. **16** erwähnt, ist die Anzahl $N(T)$ von Nullstellen im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ für $T \to \infty$ asymptotisch gleich $k \cdot T \log T$. Über die Verteilung dieser Nullstellen haben *Bohr* und *Landau*[65a]) bewiesen, daß *ihre Mehrzahl in nächster Nähe der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *gelegen ist*, d. h. bei jedem festen $\delta > 0$ ist die Anzahl $N_1(T)$ von Nullstellen, welche innerhalb des obigen Rechtecks, aber außerhalb des dünnen Streifens $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ liegen, gleich $o(T \log T)$; dies folgt aus einem allgemeinen, in Nr. **10** erwähnten Satz über *Dirichlet*sche Reihen (auf die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen angewendet), nach welchem die besprochene Anzahl $N_1(T)$ sogar gleich $O(T)$ ist. Durch eine weitergehende Untersuchung wurde dieses Resultat zuerst[65b]) zur Gleichung $N_1(T) = o(T)$ und später von *Carlson*[131]) mit Hilfe seines in Nr. **10** erwähnten Satzes über *Dirichlet*sche Reihen zu

$$N_1(T) = O(T^{1-4\delta^2+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0)$$

verschärft. Ferner gelang es *Littlewood*[111]) eine mit $t \to \infty$ zu 0 abnehmende Funktion $\varphi(t)$ explizite anzugeben mit der Eigenschaft, daß das Hauptresultat $N_1(T) = o(T \log T)$ noch gültig bleibt, wenn $N_1(T)$ die Anzahl der Nullstellen im Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \varphi(t)$, $0 < t < T$ angibt.

Ein sehr bedeutsamer Fortschritt in den Untersuchungen über die Nullstellen von $\zeta(s)$ wurde von *G. H. Hardy*[132]) gemacht, dem es zuerst zu beweisen gelang, daß *auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *tatsächlich unendlich viele Nullstellen liegen.* Daß es überhaupt auf dieser „kritischen" Geraden Nullstellen gibt, war schon früher durch numerische Untersuchungen festgestellt.[133]) Der ursprüngliche *Hardy*sche Beweis

131) *F. Carlson*, a. a. O. 67). Vgl. auch eine frühere Arbeit von *S. Wennberg*, a. a. O. 33), worin die weniger genaue Relation $N_1(T) = O\left(T : (\log T)^{1-\delta}\right)^{\delta}$ bewiesen wird.

132) *G. H. Hardy*, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1012—1014.

133) Vgl. *J. Gram*, a) Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Oversigt Vidensk. Selsk. Kóbenhavn 1895, p. 303—308; b) Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Acta Math. 27 (1903), p. 289—304; *Ch. de la Vallée Poussin*, a. a. O. 130); *E. Lindelöf*, a) Quelques applications d'une formule som-

dieses Satzes nahm seinen Ausgangspunkt in der folgenden von *Mellin*[134]) herrührenden Integraldarstellung einer Thetareihe durch die Zetafunktion

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2 y} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) y^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)\, ds, \quad (\Re(y) > 0)$$

welche zu den in Nr. **11** erwähnten Typen von Integraldarstellungen einer *Dirichlet*schen Reihe durch eine andere *Dirichlet*sche Reihe gehört. Wird unter dem Integralzeichen statt $\zeta(s)$ die in Nr. **14** erwähnte Funktion $\eta(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ eingeführt, und $\eta(\frac{1}{2} + it) = \varrho(t)$ gesetzt, so geht die *Mellin*sche Formel, wenn $y = \pi e^{2\alpha i}\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ gewählt wird, in die Formel

$$(35)\quad \int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\,\varrho(t)\, dt = -4\pi\cos\frac{\alpha}{2} + 2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}}$$

über, wobei noch benutzt ist, daß (wegen der Funktionalgleichung $\eta(s) = \eta(1-s)$) die Funktion $\varrho(t)$ eine gerade ist. Es handelt sich darum zu beweisen, daß $\varrho(t)$ unendlich viele *reelle* Nullstellen besitzt, also daß der Integrand in (35) in unendlich vielen Punkten des Integrationsintervalles $0 < t < \infty$ verschwindet. Der Beweis beruht nun darauf, daß die Funktion $\eta(s)$ (wie z. B. aus der *Riemann*schen Integraldarstellung (26) ersichtlich) auf der betrachteten Geraden $s = \frac{1}{2} + it$ *reell* ist, d. h. daß $\varrho(t)$ für reelles t reell ist, und daß daher, wenn $\varrho(t)$ nur *endlich viele* Nullstellen auf der reellen Achse besäße, für alle t von einer gewissen Stelle t_0 an durchweg die Gleichung $\varrho(t) = |\varrho(t)|$ oder durchweg die Gleichung $\varrho(t) = -|\varrho(t)|$ stattfände. Die ursprüng-

matoire générale, Acta soc. sc. Fenn. 31, No. 3 (1903), p. 1—46; b) Sur une formule sommatoire générale, Acta Math. 27 (1903), p. 305—311; *R. Backlund*, Einige numerische Rechnungen, die Nullpunkte der Riemann'schen ζ-Funktion betreffend, Öfversigt Finska Vetensk. Soc. (A) 54 (1911—12), No. 3, p. 1—7 und a. a. O. 108a), b). Das weitestgehende Resultat rührt von *Backlund* her, welcher in der letztzitierten Arbeit beweist, 1. daß auf der Strecke $\sigma = \frac{1}{2}$, $0 < t < 200$ genau 79 Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen, und 2. daß es außer diesen 79 Nullstellen keine einzige Nullstelle von $\zeta(s)$ im Rechtecke $0 < \sigma < 1$, $0 < t < 200$ gibt. Dies Resultat gehört zu den kräftigsten Argumenten für den Glauben an die Richtigkeit der „*Riemann*schen Vermutung".

134) *H. Mellin*, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, Acta soc. sc. Fenn. 24, No. 10 (1899), p. 1—50. Ein anderes Integral der Funktion $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, welches (nach *Hardy*) ebenfalls zum Beweis des *Hardy*schen Satzes verwendbar ist, ist von *S. Ramanujan*, New expressions for Riemann's functions $\xi(s)$ and $\Xi(t)$, Quart. J. 183 (1915), p. 253—261, angegeben.

liche Fassung des *Hardy*schen Beweises, daß diese Annahme mit der Gleichung (35) in Widerspruch steht, wurde bald von *Landau*[135]) etwas vereinfacht. In der vereinfachten Form kommt dieser Widerspruch einfach so heraus, daß einerseits aus (35), unter der (falschen) Annahme $\varrho(t) = |\varrho(t)|$ (oder $\varrho(t) = -|\varrho(t)|$), durch den Grenzübergang $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ (bei welchem die Thetareihe verschwindet) die Konvergenz des Integrales

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} |\varrho(t)|\, dt$$

geschlossen wird, woraus, bei Wiedereinführung der Zetafunktion selbst, die *Konvergenz* von

$$(36) \qquad \int_1^\infty t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|\, dt$$

sich ergibt, während andererseits mit Hilfe des *Cauchy*schen Satzes leicht gezeigt wird, daß für hinreichend große T das Integral $\left|\int_1^T \zeta(\frac{1}{2} + it)\, dt\right|$, und also um so mehr das Integral $\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|\, dt$, größer als kT ist, woraus durch eine grobe Abschätzung die Ungleichung

$$\int_1^T t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|\, dt > kT^{\frac{3}{4}},$$

also gewiß die *Divergenz* von (36) erfolgt.

Der *Hardy*sche Beweis wurde bald so umgeformt, daß er nicht nur die Relation $M(T) \to \infty$, wo $M(T)$ die Anzahl der Nullstellen *auf* der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ mit Ordinaten zwischen 0 und T bezeichnet, sondern zugleich auch eine untere Abschätzung von $M(T)$ liefern konnte. Nachdem zuerst *Landau*[135]) die Ungleichung $M(T) > K \log\log T$ bewiesen hatte, wurden wesentlich weitergehende Abschätzungen von *de la Vallée Poussin*[136]) und unabhängig davon von *Hardy* und *Littlewood*[31b]) gegeben; die letzteren, welche die genaueren Resultate erhielten, bewiesen u. a., daß $M(T) > KT^{\frac{3}{4}-\varepsilon}$. In den Beweisen dieser weitergehenden Sätze wurden verschiedene wesentliche Änderungen der ursprünglichen *Hardy*schen Beweismethode vorgenommen (vor allem konnten *Hardy* und *Littlewood* in ihrem Beweis der Ungleichung $M(T) > K \cdot T^{\frac{3}{4}-\varepsilon}$ den Gebrauch der *Mellin*schen Formel (35) und da-

---

135) *E. Landau*, Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil $\frac{1}{2}$, Math. Ann 76 (1915), p. 212—243.

136) *Ch. de la Vallée Poussin*, Sur les zéros de $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 163 (1916), p. 418—421 und p. 471—473.

durch die Einführung der elliptischen Thetafunktionen gänzlich vermeiden); die wesentliche Idee der Beweismethode ist aber immer dieselbe geblieben. Neuerdings ist es *Hardy* und *Littlewood*[137]) durch eine sehr verfeinerte Analyse gelungen, sogar die Abschätzung

$$M(T) > KT$$

zu beweisen, und damit festzustellen, daß die Anzahl $M(T)$ von Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ jedenfalls „fast" von derselben Größenordnung ist als die Anzahl $N(T)\,(\sim \frac{1}{2\pi} T \log T)$ von Nullstellen im ganzen Streifen $0 < \sigma < 1$.

20. Folgerungen aus der „Riemannschen Vermutung". Es wird in dieser Nummer über einige Untersuchungen referiert, deren Resultate nicht auf gesicherte Wahrheit Anspruch erheben dürfen, weil sie auf der *Annahme* der Richtigkeit der *Riemann*schen Vermutung, daß alle nicht-trivialen Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen, beruhen.[138]) Der Weg zu solchen Untersuchungen wurde von *Littlewood*[138]) geöffnet, der bei dem Problem der Bestimmung der μ-Funktion zuerst gezeigt hat, in welcher Weise die Annahme $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ für das funktionentheoretische Studium der Zetafunktion ausgenützt werden kann. Die *Littlewood*sche Methode, welche auf der Anwendung des sogenannten *Hadamard*schen Dreikreisensatzes (vgl. Art. II C 4, Nr. **62**) auf die (unter Annahme der Richtigkeit der *Riemann*schen Vermutung) für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ *reguläre* Funktion $\log \zeta(s)$ beruht, lieferte die *genaue Bestimmung der μ-Funktion für alle σ*, und zwar mit dem Resultat $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, also (vgl. Nr. **18**) $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$

---

137) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood*, The zeros of Riemann's Zeta-Funktion on the critical line, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 283—317. Die Verfasser beweisen übrigens noch mehr, nämlich daß bei jedem $a > 0$ und $U = T^a$ die Ungleichung $M(T + U) - M(T) > KU$ für alle hinreichend großen T besteht. Der Beweis dieses letzten Satzes basiert auf der „approximativen Funktionalgleichung" (Nr. **18**), welche in dieser Abhandlung zum ersten Mal (obwohl nicht in ihrer weitestgehenden Form) bewiesen wird.

138) Im Laufe der vielen (bisher mißglückten) Versuche, die „*Riemann*sche Vermutung" zu beweisen, haben verschiedene Forscher das Problem in mannigfacher Weise umgeformt. Vor allem hat *J. Littlewood*, Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$, Paris C. R. 154 (1912), p. 263—266, entdeckt, daß die *Riemann*sche Hypothese gleichwertig ist mit der Hypothese, daß die *Dirichlet*sche Reihe für $1 : \zeta(s)$ (siehe Nr. **22**) die Konvergenzabszisse $\sigma_B = \frac{1}{2}$ besitze. Vgl. auch eine Arbeit von *M. Riesz*, Sur l'hypothèse de Riemann, Acta Math. 40 (1916), p. 185—190, in welcher die Umformung des Problems auf einer von *Riesz* gefundenen interessanten Integraldarstellung der Funktion $1 : \zeta(s)$ beruht.

für $\sigma \leq \frac{1}{2}$.[139]) Über das Resultat $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ hinaus bewies *Littlewood*[138]), daß bei jedem σ des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und jedes $a > 2$

$$\log \zeta(s) = O((\log t)^{a(1-\sigma)}), \tag{37}$$

und er konnte ferner $\zeta(s)$ *auf der Geraden* $\sigma = 1$ viel genauer abschätzen, als es ohne Benutzung der „*Riemann*schen Vermutung" möglich gewesen war (vgl. Nr. 18). Neuerdings hat *Littlewood*[111]) seine Abschätzung von $\zeta(1 + it)$ noch verbessert, und zwar die Relation

$$\zeta(1 + it) = O(\log\log t)$$

bewiesen; hiermit ist das Problem, die Größenordnung von $\zeta(1 + it)$ zu bestimmen, zu einem gewissen Abschluß gebracht, weil ja andererseits bekannt ist (Nr. 18), daß $\zeta(1 + it) \neq o(\log\log t)$.

An die erste *Littlewood*sche Arbeit schloß sich eine Arbeit von *Bohr* und *Landau*[140]) an, worin (unter Annahme der *Riemann*schen Vermutung) die Relation

$$\log \zeta(s) \neq O((\log t)^{b(1-\sigma)}) \qquad (\tfrac{1}{2} < \sigma < 1) \tag{38}$$

bei passender Wahl einer Konstanten $b > 0$ bewiesen wurde. Hiermit wurde (unter Berücksichtigung des *Littlewood*schen Resultates (37)) auch die Größenordnung von $\log \zeta(s)$ im kritischen Streifen einigermaßen genau bestimmt.

Mit der Frage nach der Größenordnung von $\zeta(s)$ eng verbunden ist die Frage nach der „feineren" Verteilung der Ordinaten der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$, d. h. die Frage nach dem Verhalten des Restgliedes $R(T)$ in der *Riemann-v. Mangoldt*schen Formel (31)[141]), und auch bei diesem Problem ist es möglich gewesen, unter Heranziehen der *Riemann*schen Hypothese recht genaue Aufschlüsse zu erhalten. Einerseits hat *Landau*[142]) bewiesen, daß $R(T) \neq O(1)$ (also daß $R(T)$ nicht beschränkt bleibt), und später haben *Bohr* und *Lan*-

139) Nach *R. Backlund,* Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zetafunktion, Öfversigt Finska Vetensk. Soc. 61 (1918—19), No. 9, ist es, um den Beweis der Gleichung $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ zu führen, nicht nötig, die *Riemann*sche Vermutung in ihrem vollen Umfange zu benutzen. Vielmehr ist die Annahme: $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ mit der Annahme, das bei jedem festen $\delta > 0$ die Anzahl $A(T)$ von Nullstellen im Rechtecke $\frac{1}{2} + \delta < \sigma < 1$, $T < t < T + 1$ gleich $o(\log T)$ ist, gleichwertig. Sichergestellt (d. h. ohne irgendeine Annahme bewiesen) ist nur die Abschätzung $A(T) = O(\log T)$.

140) *H. Bohr* und *E. Landau,* Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 74 (1913), p. 3—30.

141) Der Zusammenhang dieser beiden Probleme ist neuerdings von *J. Littlewood,* a. a. O. 111) einem tiefgehenden Studium unterworfen worden.

142) *E. Landau,* Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Vierteljahrschr. Naturf. Ges. Zürich 56 (1911), p. 125—148.

dau[140]) aus der Ungleichung (38) gefolgert, daß sogar

$$R(T) \neq O((\log T)^c)$$

bei passender Wahl einer Konstanten $c > 0$. Andererseits verbesserte *Bohr*[143]) die *v. Mangoldt*sche Abschätzung $R(T) = O(\log T)$ zu $R(T) = o(\log T)$; dieses Resultat wurde dann von *Cramér*[144]), *Landau*[145]) und *Littlewood*[111]) noch etwas verschärft; letzterer bewies, daß

$$R(T) = O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

und außerdem (vgl. Nr. **16**), daß

$$\frac{1}{T}\int_0^T |R(t) - \tfrac{7}{8}|\, dt = O(\log\log T).$$

Schließlich sei noch ein interessanter Satz von *Littlewood*[143]) über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der unmittelbaren Nähe der kritischen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ erwähnt, welcher (unter Annahme der *Riemann*schen Vermutung) das Resultat (vgl. Nr. **17** und **19**), daß $\zeta(s)$ in jedem Streifen $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ sämtliche Werte unendlich oft annimmt, dahin verschärft, daß $\zeta(s)$ bei festem $K > 0$, $\delta > 0$ in jedem Kreise $|s - (\frac{1}{2} + i\tau)| < \delta$ $(\tau > \tau_0 = \tau_0(K, \delta))$ sämtliche Werte vom absoluten Betrage $< K$ annimmt.

21. Verallgemeinerte Zetafunktionen. An die *Riemann*sche Zetafunktion schließen sich mehrere Klassen anderer „Zetafunktionen" an, welche ebenfalls durch *Dirichlet*sche Reihen definiert werden und Eigenschaften besitzen, die in vielen Hinsichten mit denjenigen der *Riemann*schen Zetafunktion übereinstimmen. Die interessantesten Klassen solcher Funktionen werden, wegen des zahlentheorischen Charakters der Koeffizienten ihrer Reihenentwicklung, erst im zweiten Teil des Artikels besprochen, wo sie im Zusammenhange mit den zahlentheoretischen Problemen, für deren Behandlung sie erfunden sind, eingeführt werden. In diesem Paragraphen sollen nur von rein analytischem Gesichtspunkte aus gewisse „verallgemeinerte" Zetafunktionen

---

143) Vgl. *H. Bohr, E. Landau* und *J. Littlewood,* Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, Bull. Acad. Belgique 15 (1913), p. 1144—1175.

144) *H. Cramér,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 237—241. In dieser Abhandlung wird u. a. bewiesen, daß zur Herleitung der Abschätzung $R(T) = o(\log T)$ nicht die volle „*Riemann*sche Vermutung" nötig ist, sondern nur die (vgl. Note 139) weniger aussagende sogenannte „*Lindelöf*sche Vermutung" $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

145) *E. Landau,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 151—154. Vgl. hierzu auch *H. Cramér,* Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 155—157.

kurz besprochen werden, deren Definitionen kein zahlentheoretisches Moment enthalten.

Betrachten wir zunächst die Reihe

$$\zeta(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s} \quad (39)$$ [146]

oder allgemeiner die von *Lipschitz*[147] und *Lerch*[148] untersuchte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(w+n)^s},$$

wo x eine komplexe Zahl bedeutet, deren reeller Teil $\Re(x)$ etwa dem Intervalle $0 \leqq x < 1$ angehört, während ihr imaginärer Teil $\Im(x) \geqq 0$ ist. Diese Reihe, als Funktion von s betrachtet, ist offenbar im Falle $\Im(x) > 0$ in der ganzen s-Ebene konvergent und stellt eine ganze Transzendente dar; für $\Im(x) = 0$ ist sie, abgesehen vom Fall $x = 0$, in der Halbebene $\sigma > 0$ konvergent, definiert aber auch hier eine ganze Transzendente, und im speziellen Falle $x = 0$ (d. h. im Falle der Reihe (39)) konvergiert sie für $\sigma > 1$ und stellt, wie die Zetareihe selbst, eine meromorphe Funktion dar, die überall regulär ist mit Ausnahme des einzigen Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung besitzt. Dies ersieht man in ganz ähnlicher Weise, wie *Riemann* die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ bewies, d. h. es wird die Reihe zunächst

146) Diese Funktion ist besonders von *H. Mellin*, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, Acta soc. sc. Fenn. 24, No. 10 (1899), im Zusammenhange mit seinen Studien über Umkehrformeln (vgl. Note 70) näher untersucht. Vgl. auch *A. Piltz*, Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmethischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Habilitationsschrift, Jena 1884, p. 1—48; *E. Lindelöf*, a. a. O. 97) und *E. W. Barnes*, a) The theory of the Gamma function, Mess. of Math. (2) 29 (1899), p. 64—128; b) The theory of the double Gamma function, London Phil. Trans. (A) 196 (1901), p. 265—387; c) On the theory of the multiple Gamma function, Cambridge Phil. Trans. 19 (1904), p. 374—425; *Barnes* untersucht auch Reihen der Form

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{\infty} \frac{1}{(w + n_1\omega_1 + \cdots n_p\omega_p)^s}.$$

147) *R. Lipschitz*, a) Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, Crelles J. 54 (1857), p. 313—328; b) Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, Crelles J. 105 (1889), p. 127—156.

148) *M. Lerch,* Note sur la fonction $K(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$, Acta Math. 11 (1887), p. 19—24.

durch ein einfaches bestimmtes Integral dargestellt und dieses wieder in ein komplexes Kurvenintegral umgeformt. Aus dieser letzten Integraldarstellung folgt weiter, wie bei *Riemann*, durch Deformation des Integrationsweges und Anwendung des *Cauchy*schen Satzes[149]), daß unsere Funktion einer der *Riemann*schen ähnlichen *Funktionalgleichung* genügt, welche in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(w+n)^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi i)^{1-s}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i w (m-x)}}{(-x+m)^{1-s}}$$

geschrieben werden kann.

Eine wesentlich weitergehende Verallgemeinerung der *Riemann*schen Zetafunktion ist von *Epstein*[150]) gegeben, dessen Untersuchungen an den zweiten *Riemann*schen Beweis der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$, d. h. an die Darstellung der Zetafunktion durch ein bestimmtes Integral mit Hilfe elliptischer Thetafunktionen anknüpfen. *Epstein* betrachtet Reihen der Form

$$\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu x_\mu}}{\{\varphi(y+m)\}^{\frac{s}{2}}}, \tag{40}$$

wo $x_1, \ldots x_p, y_1, \ldots y_p$ Konstanten sind und $\varphi(\alpha + \beta)$ ein symbolischer Ausdruck für die quadratische Form $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}(\alpha_\mu + \beta_\mu)(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ der $2p$ Variabeln $\alpha_1, \ldots \beta_p$ ist; die durch eine solche Reihe (40) definierte Funktion wird eine *Zetafunktion* p^{ter} *Ordnung* genannt. *Epstein* zeigt nun, daß die Reihe (40) durch ein bestimmtes Integral mit Hilfe allgemeiner Thetafunktionen dargestellt werden kann, und durch Anwendung von Transformationsformeln dieser Thetafunktionen beweist er, daß auch diese allgemeine Zetafunktion einer Funktionalgleichung von ähnlichem Charakter wie die *Riemann*sche für $\zeta(s)$ genügt.

---

149) Vgl. *M. Lerch*, a. a. O. 148); die Funktionalgleichung wurde zuerst von *R. Lipschitz*, a. a. O. 147 a), gefunden, welcher sie mit Hilfe der Theorie der *Fourier*schen Integrale herleitete.

150) *P. Epstein*, a) Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen, Math. Ann. 56 (1903), p. 615—644; b) Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II, Math. Ann. 63 (1907), p. 205—216.

Zweiter Teil.

22. Einleitung. Bezeichnungen. Dieser Teil handelt von den zahlentheoretischen Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten Theorien. Die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ sind als Hilfsmittel für analytisch-zahlentheoretische Untersuchungen besonders wertvoll; einen „Grund" hierfür kann man in ihrer Multiplikationsregel (vgl. Nr. **12**) sehen, wonach bei der Koeffizientenbildung die „multiplikativen" Eigenschaften der Zahlen zur Geltung kommen. Die wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen treten als Koeffizienten gewisser *Dirichlet*scher Reihen auf, die mit der *Riemann*schen Zetafunktion in einfacher Weise zusammenhängen. Indem man auf diese Reihen die Sätze über Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer *Dirichlet*schen Reihe und der von der Reihe dargestellten Funktion (vgl. Nr. **4** und **5**) anwendet, gelangt man mit Hilfe der Theorie der Zetafunktion zu neuen Ergebnissen über die Natur der zahlentheoretischen Funktionen. Manche Probleme erfordern die Einführung neuer erzeugender Funktionen, die alle der *Riemann*schen $\zeta(s)$ mehr oder weniger ähnlich sind. Verschiedene Probleme lassen sich auch durch Methoden angreifen, die von der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen gänzlich unabhängig sind.

Es dürfte zweckmäßig sein, einige der im folgenden gebrauchten Bezeichnungen hier zusammenzustellen; die unten gegebenen Definitionen werden also im Texte nicht wiederkehren.

A. Die folgenden zahlentheoretischen Funktionen seien für ganze $n \geqq 1$ definiert:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{für } n = p^m \ (p \text{ Primzahl, } m \geqq 1 \text{ ganz}), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^\nu & \text{für } n = p_1 p_2 \dots p_\nu \ (\text{die } p_i \textit{ verschiedene} \text{ Primzahlen}), \\ 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \begin{cases} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_\nu} & \text{für } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu}, \\ 1 & \text{für } n = 1; \end{cases}$$

$d(n) =$ Anzahl der Teiler von n;

$\sigma(n) =$ Summe der Teiler von n;

$\varphi(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen $\leqq n$.

Diese Funktionen sind alle mit $\zeta(s)$ nahe verbunden; es gilt in der Tat für hinreichend große σ

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s), \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} = \log \zeta(s),$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1),$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

B. Die folgenden summatorischen Funktionen der obigen und einiger verwandten *Dirichlet*schen Reihen seien für jeden positiven Wert von x definiert:

$$\pi(x) = \text{Anzahl der Primzahlen} \leq x$$
$$= \sum_{p < x} 1,$$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}$$ (p durchläuft die Primzahlen, m die ganzen positiven Zahlen)

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$
$$= \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p < x} \log p,$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n),$$
$$= \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n), \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{x} \varphi(n),$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{x} d(n), \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{x} \sigma(n).$$

C. Es sei $g(x)$ irgendeine der unter B. eingeführten summatorischen Funktionen. Aus $g(x)$ werde die Funktion $\bar{g}(x)$ dadurch ab-

geleitet, daß für alle $x > 0$

$$\bar{g}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon) + g(x-\varepsilon)}{2}$$

gesetzt wird. $\bar{g}(x)$ ist also nur in den Unstetigkeitspunkten (d. h. für gewisse ganzzahlige x) von $g(x)$ verschieden.

III. Die Verteilung der Primzahlen.

23. Der Primzahlsatz. Ältere Vermutungen und Beweisversuche. Schon früh entstand das Problem, die Anzahl der Primzahlen zwischen zwei gegebenen Grenzen zu bestimmen, also insbesondere für die Funktion $\pi(x)$ einen (angenäherten oder exakten) Ausdruck aufzustellen. Bei dem höchst unregelmäßigen Verlauf dieser Funktion schien es von vornherein unmöglich, sie durch eine einfache analytische Funktion genau darzustellen; man mußte also zunächst darauf ausgehen, ein *asymptotisches* Resultat, etwa von der Form $\pi(x) \sim f(x)$, zu erhalten. Hierdurch ist schon die Fragestellung angebahnt, die zu dem berühmten *Primzahlsatz*[151]) führte: es gilt für unendlich wachsendes x:

$$\pi(x) \sim Li(x), \tag{41}$$

wo

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{du}{\log u} \right)$$

gesetzt ist. — Dieser Satz kann wohl als das wichtigste Ergebnis der analytischen Zahlentheorie bezeichnet werden; durch die Anstrengungen, ihn zu beweisen, wurden ihre feinsten Methoden geschaffen und ausgebildet.

In (41) kann man, ohne den Sinn der Formel zu verändern, $Li(x)$ durch jede der Bedingung $f(x) \sim Li(x)$ genügende Funktion, z. B. durch $\frac{x}{\log x}$, ersetzen. Eine zu (41) äquivalente Behauptung wurde zuerst von *Legendre*[152]) ohne Beweis ausgesprochen: es werde $\pi(x)$ angenähert durch die Funktion $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ dargestellt. Schon vor *Legendre* war *Gauß*[153]), wie aus einem viel später geschriebenen Briefe ersichtlich ist, auf die Vermutung $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{du}{\log u}$ gekommen. Von

---

151) Die Benennung rührt von *H. v. Schaper* her: Über die Theorie der *Hadamard*schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen, Diss. Göttingen 1898.

152) *A. M. Legendre,* a) Essai sur la théorie des nombres (2. Aufl.), Paris 1808, p. 394; b) Théorie des nombres (3. Aufl.), Paris 1830, Bd. 2, p. 65.

153) *C. F. Gauß,* Werke 2, 2. Aufl., p. 444—447.

Dirichlet[154]) wurde gelegentlich behauptet, $\sum\limits_{n=1}^{x} \frac{1}{\log n}$ sei eine bessere Vergleichsfunktion als diejenige von *Legendre*.

Einen präzisen Sinn erhielten diese Andeutungen erst durch die Arbeiten von *Tschebyschef*.[155]) In moderner Ausdrucksweise können seine wichtigsten Resultate etwa folgendermaßen zusammengefaßt werden: Er betrachtet die Funktionen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$; zwischen ihnen besteht ein Zusammenhang, der durch die Beziehungen[156])

$$(42)\quad \begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int\limits_{2}^{x} \frac{\vartheta(u)}{u \log^2 u}\, du \\ \vartheta(x) &= \pi(x)\log x - \int\limits_{2}^{x} \frac{\pi(u)}{u}\, du \\ \psi(x) &= \vartheta(x) + O(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

ausgedrückt wird (in den beiden ersten Gleichungen kann man übrigens π bzw. ϑ durch Π bzw. ψ ersetzen). Hieraus läßt sich unmittelbar ablesen, daß für unendlich wachsendes x alle drei Quotienten

$$(43)\quad \frac{\pi(x)}{Li(x)},\quad \frac{\vartheta(x)}{x},\quad \frac{\psi(x)}{x}$$

dieselben oberen bzw. unteren Unbestimmtheitsgrenzen haben. Werden diese durch l (lim inf) und L (lim sup) bezeichnet, so findet *Tschebyschef*

$$a \leqq l \leqq 1 \leqq L \leqq \tfrac{6}{5} a,$$

mit $a = 0{,}92129$.

Insbesondere folgt hieraus[157]): existiert für irgendeinen der Quotienten (43) ein Grenzwert, so haben alle drei Quotienten den Grenzwert 1. Außer durch (41) läßt sich also der Primzahlsatz durch irgendeine der Gleichungen

$$(44)\quad \vartheta(x) \sim x$$

$$(45)\quad \psi(x) \sim x$$

ausdrücken.

154) Vgl. *G. Lejeune-Dirichlet*, Werke 1, p. 372, Fußnote 2).

155) *P. Tschebyschef*, a) Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. présentés Acad. Pétersb. 6 (1851), p. 141—157; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 341—365; Œuvres 1, St. Pétersbourg 1899, p. 27—48; b) Mémoire sur les nombres premiers, J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p 366—390; Mém. présentés Acad. Pétersb. 7 (1854), p. 15—33; Œuvres 1, p. 49—70.

156) Die beiden ersten Gleichungen werden einfach durch partielle Summation aus den Definitionsgleichungen für $\pi(x)$ und $\vartheta(x)$ abgeleitet.

157) Das kann jetzt unmittelbar aus elementaren Sätzen über *Dirichlet*sche Reihen gefolgert werden. Vgl. Nr. 5, insbesondere die Fußnoten 27) und 28), vgl. auch *E. Landau*, Handbuch, § 31.

Die *Tschebyschef*schen Resultate wurden teils durch Betrachtung der Funktionen $\zeta(s)$ und $\log \zeta(s)$ für reelle, gegen 1 abnehmende Werte von s, teils durch elementare Summenabschätzungen mit Hilfe der Identität[158]

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots = \log([x]!)$$

abgeleitet. Die Schranken für l und L wurden später von anderen[159] mit analogen Methoden verengert; es ist jedoch bisher niemand gelungen, auf diesem Wege die Existenz eines Grenzwertes, d. h. den Primzahlsatz, zu beweisen.

24. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée Poussin. Der Weg, der zu einem strengen Beweis des Primzahlsatzes führen konnte, wurde erst geöffnet durch die Erscheinung der grundlegenden *Riemann*schen Arbeit[95] vom Jahre 1859, wo zum ersten Male die komplexe Funktionentheorie auf das Problem angewandt und die Zetafunktion völlig allgemein untersucht wurde. Das Endziel dieser Arbeit war allerdings nicht der Beweis des Primzahlsatzes, doch findet man hier schon die Integralformel für die Koeffizientensumme einer *Dirichlet*schen Reihe (vgl. Nr. 4), auf

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,\,m} \frac{1}{m p^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s}$$

angewandt. *Halphen*[160] und *Cahen*[161] versuchten, diesen *Riemann*schen Ansatz für den Beweis des Primzahlsatzes zu benutzen, ein vollständiger Beweis wurde jedoch erst im Jahre 1896 gegeben, und zwar fast gleichzeitig von *Hadamard*[162] und *de la Vallée Poussin.*[163]

Die früheren Versuche waren hauptsächlich an den folgenden zwei Schwierigkeiten gescheitert: 1. die Eigenschaften der komplexen Null-

158) Diese Identität wurde unabhängig von *Tschebyschef*[155] und *de Polignac,* Recherches nouvelles sur les nombres premiers, Paris 1851, entdeckt.

159) Betreffs der an *Tschebyschef* in dieser Richtung anschließenden Arbeiten sei auf *G. Torelli,* Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato, Neapel 1901 (Atti Accad. sc. fis. mat. (2) 11 No. 1), Cap. 4—5 verwiesen. In dieser Monographie wird die Geschichte des Gegenstandes ausführlich dargestellt.

160) *G. H. Halphen,* Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques, Paris C. R. 96 (1883), p. 634—637. Auch *T. J. Stieltjes* gibt an, einen Beweis gefunden zu haben: Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, verschiedene Stellen, vgl. z. B. Lettre 314.

161) *E. Cahen,* Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x, Paris C. R. 116 (1893), p. 85—88.

162) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. soc. math. France 24 (1896), p. 199—220.

163) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Première partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20:2 (1896), p. 183—256.

stellen von $\zeta(s)$ waren noch nicht hinreichend bekannt; 2. die Integrale

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds \tag{46}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds, \tag{47}$$

die für $a > 1$ die Funktionen $\bar{\psi}(x)$ bzw. $\Pi(x)$ darstellen (vgl. Nr. **4**; in einem Unstetigkeitspunkt muß man nach den dortigen Ausführungen die Hauptwerte der Integrale nehmen), sind nur bedingt konvergent.

Die erste Schwierigkeit wurde von *Hadamard* und *de la Vallée Poussin* dadurch überwunden, daß sie zeigten: jede Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt links von der Geraden $\sigma = 1$ (vgl. Nr. **14**). Dieser Satz wird bei allen bisher bekannten Beweisen des Primzahlsatzes als wesentliche Grundlage benutzt. — Um unbedingt konvergente Ausdrücke zu erhalten, benutzen die beiden Verfasser an der Stelle von (46) und (47) Integralausdrücke für gewisse mit $\bar{\psi}$ und $\bar{\Pi}$ zusammenhängende Funktionen.

Hadamard betrachtet das für $\mu > 1$ unbedingt konvergente Integral (vgl. (12) Nr. **4**).

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s^\mu}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{n=1}^{x}\Lambda(n)\log^{\mu-1}\frac{x}{n} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int_2^x\frac{\psi(t)}{t}\log^{\mu-2}\frac{x}{t}\,dt.$$

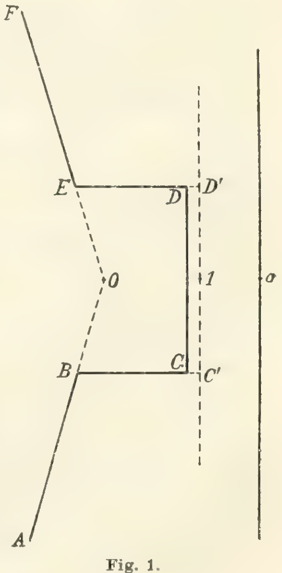


Fig. 1.

Durch eine Verschiebung des Integrationsweges folgert er, unter Benutzung der Tatsache, daß die ganze Funktion $(s-1)\zeta(s)$ vom Geschlechte 1 ist (vgl. Nr. **15**),

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int_2^x\frac{\psi(t)}{t}\log^{\mu-2}\frac{x}{t}\,dt$$

$$= x - \sum_\varrho{}'\frac{x^\varrho}{\varrho^\mu} - \frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDEF}\frac{x^s}{s^\mu}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds.$$

Rechts durchläuft ϱ in Σ' nur die oberhalb $D'E$ oder unterhalb BC' gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$; da auf $\sigma = 1$ keine Nullstellen liegen, kann DD' so klein gewählt werden, daß auch noch das Rechteck $CDD'C'$ nullstellenfrei wird (vgl. Figur 1).

Da der neue Integrationsweg ganz in der Halbebene $\sigma < 1$ verläuft, schließt man hieraus

$$(49) \qquad \frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int_2^x \frac{\psi(t)}{t} \log^{\mu-2}\frac{x}{t}\, dt \sim x$$

und speziell für $\mu = 2$

$$(50) \qquad \int_2^x \frac{\psi(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n} \sim x\,.$$

Hadamard zeigt, daß hieraus unmittelbar zu (44) oder (45) übergegangen werden kann (vgl. auch Nr. **25**), womit der Primzahlsatz bewiesen ist.

Auch *de la Vallée Poussin* nimmt als Ausgangspunkt ein unbedingt konvergentes Integral, nämlich

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(s-u)(s-v)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) ds\,.$$

Durch Anwendung der Gleichung (29), Nr. **15**, erhält er, da $\Re(\varrho) < 1$ ist,

$$(51) \qquad \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \log x + K - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-1}}{\varrho(\varrho-1)} + \frac{a}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \log x + K + o(1),$$

und zeigt, wie man hieraus zu (50) und (45) übergehen kann.

25. Die Beweismethoden von Landau. Bei den ersten Beweisen des Primzahlsatzes traten als wichtige Hilfsmittel Sätze auf, die durch die Anwendung der *Hadamard*schen Theorie der ganzen Funktionen auf $(s-1)\zeta(s)$ gefunden wurden und also die Existenz der Zetafunktion in der ganzen Ebene und gewisse Eigenschaften ihrer Nullstellen voraussetzen.

Landau hat aber gezeigt, daß der Beweis in weitgehendem Maße von diesen Voraussetzungen befreit werden kann, was für die Anwendung der Methode auf allgemeinere Fälle wichtig ist (vgl. Nr. **42**).

Durch Benutzung der elementar nachweisbaren Ungleichung

$$(52) \qquad \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < K(\log t)^A \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{(\log t)^B}, \quad t > t_0,$$

mit konstanten A, B, K, t_0, gelang es ihm[164]) den Primzahlsatz zu beweisen, indem er mit dem *Hadamard*schen Integral (48) für $\mu = 2$ und mit einem in jenem Gebiete verlaufenden Integrationsweg arbeitete.

---

164) *E. Landau,* a. a. O. 125) und Handbuch, § 51—54.

Später[165]) zeigte er, daß man die Voraussetzungen sogar noch mehr verringern kann: für den Beweis des Primzahlsatzes ist in der Tat nur wesentlich, daß $\frac{\zeta'}{\zeta}$ auf der Geraden $\sigma = 1$ (abgesehen vom Pole $s = 1$) regulär ist und für $\sigma \geqq 1$, $|t| \to \infty$ gleichmäßig von der Form $O(|t|^k)$ ist. Der am Ende von Nr. **5** genannte Satz von *Landau*[29]) über *Dirichlet*sche Reihen mit positiven Koeffizienten ist nämlich unmittelbar auf $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum \Lambda(n) n^{-s}$ anwendbar und liefert gerade die Beziehung (45). Für den Beweis dieses Satzes werden gewisse allgemeine Grenzwertsätze herangezogen, die speziell den Übergang von (50) oder (51) zu (45) ermöglichen (vgl. auch Nr. **33**). Wenn beispielsweise die Funktion $f(t)$ für $t > a$ nirgends abnimmt, so kann man von

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt \sim x$$

auf die asymptotische Gleichheit der Ableitungen schließen: $f(x) \sim x$.

Durch Benutzung des Integranden $\frac{x^s}{s^2} \log \zeta(s)$ anstatt $\frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ kann man, wie *Landau*[166]) zeigt, den Satz (41) über $\pi(x)$ direkt, d. h. ohne den Umweg über $\psi(x)$ oder $\vartheta(x)$, beweisen; auch gelingt es ihm[167]) mit Hilfe des nur bedingt konvergenten Integrals (46) direkt zu (45) — und sogar zur Gleichung (53) von Nr. **27** — ohne den Umweg über (50) zu gelangen.

26. Andere Beweise. Der Beweis von *H. v. Koch*[168]) weicht von den vorhergehenden dadurch ab, daß er gar nicht mit Integralen von der Form $\int \frac{x^s}{s^u} f(s)\, ds$ arbeitet. Er gibt für die summatorischen Funktionen der *Dirichlet*schen Reihen für $\frac{\zeta'}{\zeta}$ und $\log \zeta$ unter Benutzung gewisser Diskontinuitätsfaktoren Ausdrücke, die in der folgenden Darstellungsformel für die Koeffizientensumme einer beliebigen *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (mit absolutem Konvergenzbereich) zu-

165) *E. Landau,* a. a. O. 29) und 21) sowie Zwei neue Herleitungen für die asymptotische Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, Sitzungsber. Akad. Berlin 1908, p. 746—764 und Handbuch, § 66.

166) *E. Landau,* a. a. O. 165) (Zwei neue Herleitungen ...) und Handbuch, § 64.

167) *E. Landau,* Über den Gebrauch bedingt konvergenter Integrale in der Primzahltheorie, Math. Ann. 71 (1912), p. 368—379.

168) *H. v. Koch,* Sur la distribution des nombres premiers, Acta Math. 24 (1901), p. 159—182.

sammengefaßt werden können[169]):

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n = \lim_{c \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} e^{c\nu x} f(c\nu), \qquad (x \neq \lambda_n).$$

Diese Formel erscheint dadurch bemerkenswert, daß $f(s)$ darin nur mit einem reellen und positiven Argument auftritt.

Hardy und *Littlewood*[170]) beweisen, wie schon in Nr. **5** erwähnt wurde, mit Hilfe des „*Cahen-Mellin*schen Integrals" (vgl. Nr. **11**) einen Satz über *Dirichlet*sche Reihen, der den *Landau*schen, in Nr. **5** und **25** erwähnten, Satz — und damit den Primzahlsatz — als Spezialfall enthält.

Steffensen[171]) zeigt, daß eine von ihm und schon früher von *Mellin*[172]) gefundene Integraldarstellung für die Koeffizientensumme einer *Dirichlet*schen Reihe zum Beweis des Primzahlsatzes benutzt werden kann.

27. Die Restabschätzung. Schon durch die Resultate von *Tschebyschef*[155]) wurde die Vermutung nahe gelegt, daß unter allen asymptotisch gleichwertigen Funktionen, die man als Vergleichsfunktionen für $\pi(x)$ benutzt hatte, dem Integrallogarithmus eine besonders ausgezeichnete Stellung zukommt. Streng entschieden wurde diese Frage erst durch *de la Vallée Poussin*[173]), der aus seiner Gleichung (51) mit Hilfe seines Satzes (vgl. Nr. **19**)

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{k}{\log t}, \quad t > t_0$$

die Folgerung

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}\right) \tag{53}$$

für jedes $\alpha < \sqrt{k}$ zog. Gleichzeitig folgt, daß auch die Differenzen

$$\Pi(x) - Li(x), \quad \vartheta(x) - x, \quad \psi(x) - x$$

alle drei von der Größenordnung $O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$ sind. Der Integral-

169) Vgl. auch *Hj. Mellin,* Die Dirichletschen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Math. 28 (1904), p. 37—64.

170) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31).

171) *J. F. Steffensen,* Analytiske studier med anvendelser paa taltheorien, Diss. Kopenhagen 1912; Über eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Acta Math. 37 (1914), p. 75—112; vgl. auch: Über Potenzreihen, im besonderen solche, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind, Palermo Rend. 38 (1914), p. 376—386.

172) a. a. O. 169).

173) *Ch. de la Vallée Poussin,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique 59 (1899—1900), No. 1.

logarithmus stellt demnach $\pi(x)$ in einem ganz präzisen Sinne *besser* dar als $\frac{x}{\log x}$ oder irgendeine der Funktionen

$$f_q(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots \frac{(q-1)!\,x}{\log^q x} = Li(x) + O\left(\frac{x}{\log^{q+1} x}\right),$$

die bei der asymptotischen Entwicklung von $Li(x)$ auftreten.[174] Nach (53) gilt nämlich für $q = 1, 2, \ldots$

$$\pi(x) - f_q(x) \sim \frac{q!\,x}{\log^{q+1} x}, \tag{54}$$

aber

$$\pi(x) - Li(x) = o\left(\frac{x}{\log^{q+1} x}\right). \tag{55}$$

Bei *Landau*[164]) wird mit Hilfe von (52), also ohne Benutzung der Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ oder der Existenz ihrer Nullstellen, die Abschätzung

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt[13]{\log x}}\right) \tag{56}$$

bewiesen; diese ist weniger scharf als (53), reicht aber doch für die Folgerungen (54) und (55) aus. *Landau*[175]) hat übrigens auch den Beweis von (53) wesentlich vereinfacht; diese Gleichung, mit dem von ihm angegebenen Werte von α, stellt die schärfste bisher mit Sicherheit bekannte Abschätzung von $\pi(x)$ dar.[176])

Nimmt man dagegen an, die Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion sei richtig (vgl. Nr. **20**), so erhält man noch schärfere Resultate, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\pi(x) - Li(x)\\ \Pi(x) - Li(x)\end{array}\right\} = O(\sqrt{x}\log x), \tag{57}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta(x) - x\\ \psi(x) - x\end{array}\right\} = O(\sqrt{x}\log^2 x). \tag{58}$$

---

174) Hieraus folgt die Richtigkeit einer von *Lionnet*, Question 1075, Nouv. ann. math. (2) 11 (1872), p. 190, ausgesprochenen Vermutung, daß für große x mehr Primzahlen im Intervalle $(1, x)$ als in $(x, 2x)$ liegen. Es gilt nämlich $2\pi(x) - \pi(2x) \sim 2\log 2\,\frac{x}{\log^2 x}$; vgl. *E. Landau*, Solutions de questions proposées, 1075, Nouv. ann. math. (4) 1 (1901), p. 281—282.

175) *E. Landau*, a) a. a. O. 29); b) Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Palermo Rend. 27 (1909), p. 46—58; c) Handbuch § 81; *Landau* zeigt, daß (53) für alle $\alpha < \frac{1}{\sqrt{18{,}53}}$, also z. B. für $\alpha = \frac{1}{5}$, gilt.

176) Der von *Littlewood*, a. a. O. 111) ohne Beweis ausgesprochene Satz $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1 - \frac{c\log\log t}{\log t}$ würde eine Verbesserung von (53) zulassen, indem er ein Restglied von der Form $O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$ liefern würde.

Diese Gleichungen sind zuerst von *v. Koch*[168]) mit seiner in der vorigen Nummer erwähnten Methode bewiesen; sie können auch aus der *de la Vallée Poussin*schen Gleichung (51) erhalten werden, durch ein Verfahren, das von *Holmgren*[177]) und in einem analogen Fall von *Landau*[178]) benutzt wurde. *Landau*[179]) hat diese Abschätzungen auch auf anderem Wege bewiesen; die etwas unschärfere Abschätzung $O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$ folgt nach den *Littlewood*schen Ergebnissen über die μ-Funktion (vgl. Nr. **20**) direkt aus dem Konvergenzsatz von *Landau-Schnee* (vgl. Nr. **6**).

Bezeichnet man allgemein durch Θ die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$, wobei also $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$ ist, so bleiben (57) und (58) jedenfalls richtig, wenn $\sqrt{x}$ durch x^Θ ersetzt wird.[179]) (Im Falle $\Theta = 1$ ist dies natürlich trivial.) Die *Dirichlet*sche Reihe

$$(59) \qquad \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)-1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \zeta(s)\right)$$

konvergiert also für $\sigma > \Theta$. Aus (53) folgt, daß sie jedenfalls auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ konvergiert.

Auch wenn die *Riemann*sche Vermutung bewiesen wird, kann man nicht hoffen, die durch (57) und (58) gegebenen Abschätzungen wesentlich zu verbessern. Jedenfalls kann für kein $\eta < \Theta$ z. B.

$$\psi(x) - x = O(x^\eta)$$

sein[180]), denn daraus würde die Konvergenz der linken Seite von (59) — und also die Regularität der rechten Seite — für $\sigma > \eta$ folgen. Weitere Sätze in dieser Richtung gaben *Phragmén*[181]), *Schmidt*[182]) und *Landau*[183]), der die Frage in Beziehung zu seinem Satze über *Dirichlet*-

177) *E. Holmgren,* Om primtalens fördelning, Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 59, Stockholm 1902—1903, p. 221—225.

178) *E. Landau,* Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 1—24.

179) *E. Landau,* a. a. O. 175b) und Handbuch, § 93—94.

180) Dies wurde schon von *A. Piltz* behauptet: Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Habilitationsschrift, Jena 1884. Vgl. auch *T. J. Stieltjes,* a. a. O. 160), Lettre 299.

181) *E. Phragmén,* Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de *Riemann,* Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. Stockholm 48 (1891—1892), p. 599—616 und Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques, ibid. 58 (1901—1902), p. 189—202.

182) *E. Schmidt,* Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze, Math. Ann. 57 (1903), p. 195—204.

183) *E. Landau,* Über einen Satz von *Tschebyschef,* Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550, und Handbuch, § 201—204.

sche Reihen mit positiven Koeffizienten (vgl. Nr. 6) setzte. Ein bedeutender Fortschritt wurde von *Littlewood*[184]) gemacht; durch eine Methode, auf die wir in der nächsten Nummer zurückkommen, bewies er die Existenz einer positiven Konstanten K derart, daß alle vier Ungleichungen

$$(60)\quad \begin{cases} \pi(x) - Li(x) > K \frac{\sqrt{x}}{\log x} \operatorname{logloglog} x \\ \pi(x) - Li(x) < - K \frac{\sqrt{x}}{\log x} \operatorname{logloglog} x \\ \vartheta(x) - x \quad > K \sqrt{x} \operatorname{logloglog} x \\ \vartheta(x) - x \quad < - K \sqrt{x} \operatorname{logloglog} x \end{cases}$$

beliebig große Lösungen besitzen. Das gleiche gilt für die entsprechenden Ungleichungen mit Π an der Stelle von π und ψ an der Stelle von ϑ. Dies ist das beste bisher bekannte Resultat über die wirklich stattfindenden Unregelmäßigkeiten der Primzahlfunktionen; wäre es aber gelungen, die *Falschheit* der *Riemann*schen Vermutung (d. h. $\Theta > \frac{1}{2}$) zu beweisen, so könnte nach *Schmidt*[182]) der Faktor von K in (60) sogar durch $x^{\Theta-\epsilon}$ ersetzt werden. — Das Resultat von *Littlewood* ist besonders darum bemerkenswert, weil man früher die Beziehung

$$(61)\qquad \pi(x) < Li(x)$$

als höchst wahrscheinlich betrachtet hat[185]); diese Beziehung gilt insbesondere für alle $x < 10.000.000$. Nach (60) kann sie aber nicht allgemein gelten.

Nach (60) ist z. B. die Funktion $\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}}$ sicher nicht beschränkt. Wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, so hat sie trotzdem, wie *Cramér*[186]) zeigt, einen beschränkten quadratischen Mittelwert, d. h.

$$\frac{1}{x}\int\limits_2^x \left(\frac{\psi(t) - t}{\sqrt{t}}\right)^2 dt$$

ist beschränkt, strebt aber für $x \to \infty$ keinem bestimmten Grenzwert

184) *J. E. Littlewood,* Sur la distribution des nombres premiers, Paris C. R. 158 (1914), p. 1869—1872; *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31b).

185) Vgl. *Gauß,* a. a. O. 153), Bemerkung von *E. Schering* in *Gauß'* Werke 2, p. 520; *Phragmén,* a. a. O. 189); *Lehmer,* List of prime numbers from 1 to 10.006.721, Washington 1914.

186) *H. Cramér,* Some theorems concerning prime numbers, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys 15 (1920), No. 5.

zu, was dagegen von

$$\frac{1}{\log x}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt$$

gilt.[187])

28. Die Riemannsche Primzahlformel. Das Hauptziel der *Riemann*schen Primzahlarbeit[95]) war die Aufstellung eines *exakten* Ausdrucks für die Funktion $\overline{\Pi}(x)$; durch die Betrachtung des Integrals (47) wurde *Riemann* nämlich auf die Formel

$$(62)\quad \overline{\Pi}(x) = Li(x) - \sum_{\gamma > 0} \left(Li(x^{\varrho}) + Li(x^{1-\varrho})\right) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)t\log t} - \log 2$$

geführt. (Ein unwesentlicher Schreib- oder Rechenfehler im letzten, konstanten Gliede wurde von *Genocchi*[188]) berichtigt.) Die Summe ist hier über alle Nullstellen $\varrho = \beta + \gamma i$ von $\zeta(s)$ zu erstrecken, die der oberen Halbebene angehören, und es ist

$$Li(x^{a+bi}) = \int_{-\infty + bi\log x}^{(a+bi)\log x} \frac{e^z}{z}\, dz \pm \pi i$$

gesetzt, je nachdem $b \log x \gtrless 0$ gilt.[189]) Über seinen Beweis der Konvergenz dieser Reihe gab *Riemann* nur eine unbestimmte Andeutung, und auch aus anderen Gründen war die Formel als nur heuristisch begründet anzusehen. Wegen der äußerst verwickelten Natur der auftretenden Funktionen wurde sogar an der Möglichkeit gezweifelt, die Formel überhaupt beweisen oder jedenfalls daraus irgendwelche Schlüsse ziehen zu können.[190]) Es hat auch lange gedauert, bis ein vollständiger Beweis gegeben wurde; nach verschiedenen Versuchen[191]) gelang dies zuerst *v. Mangoldt*[192]), der eine entsprechende Formel für die

187) *H. Cramér,* Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 147—153; vgl. auch Sur un problème de *M. Phragmén,* Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 27.

188) *A. Genocchi,* Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite, Ann. Mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 52—59.

189) Über den Sinn der Formel und ihre Verwendung für numerische Rechnungen vgl. *E. Phragmén,* Über die Berechnung der einzelnen Glieder der *Riemann*schen Primzahlformel, Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 48, Stockholm 1891—1892, p. 721—744.

190) Vgl. z. B. *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 163), p. 252—256.

191) Vgl. z. B. *A. Piltz,* a. a. O. 180); *J. P. Gram,* Undersögelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd. (6) 2 (1881—1886), p. 183—308.

192) *H. v. Mangoldt,* a. a. O. 16) und Zu *Riemanns* Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Crelles J. 114 (1895), p. 255—305.

Funktion

$$F(x, r) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\Lambda(n)}{n^r} - \frac{\Lambda(x)}{2x^r} \quad \text{(für nicht ganze } x \text{ bedeutet } \Lambda(x) \text{ Null)}$$

aufstellte, um dann durch Integration nach dem Parameter r zur *Riemann*schen Formel überzugehen.[193]) $F(x, 0)$ ist mit $\psi(x)$ identisch, und in diesem Falle lautet die Formel

$$(63) \qquad \bar{\psi}(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \log 2\pi,$$

wo jetzt die Summe über alle komplexen ρ, nach absolut wachsenden Ordinaten geordnet, erstreckt wird. Diese Formel, deren einzelne Glieder elementare Funktionen sind, ist für die spätere Entwicklung sogar wichtiger als (62) geworden. Formal kommt sie bei der Betrachtung des Integrals (46) unmittelbar heraus, da rechts die Summe der Residuen des Integranden links vom Integrationswege steht.

Da $\psi(x)$ in den Punkten $x = p^m$ unstetig ist, kann $\sum \frac{x^\rho}{\rho}$ dort nicht gleichmäßig konvergieren. *Landau*[194]), der den *v. Mangoldt*schen Beweis vereinfacht und auch (62) direkt aus (47) abgeleitet hat, zeigt aber, daß die Reihe in jedem Intervall, das rechts von $x = 1$ liegt und von den $x = p^m$ frei ist, gleichmäßig konvergiert. Er dehnt seine Untersuchungen auch auf die allgemeinere Reihe

$$(64) \qquad \sum_{\gamma > 0} \frac{x^\rho}{\rho^k} \qquad (0 < k \leqq 1)$$

aus[195]), welche analoge Konvergenzeigenschaften besitzt[196]), die auf das Verhalten der endlichen Summe $\sum_{0 < \gamma \leqq T} x^\rho$ zurückgeführt werden können. *Cramér*[197]) betrachtet diese Reihen auch für komplexe Werte der

193) Zu diesem Übergang vgl. *H. Cramér,* Über die Herleitung der *Riemann*schen Primzahlformel, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), No. **24.**

194) *E. Landau,* Neuer Beweis der Riemannschen Primzahlformel, Sitzungsber. Akad. Berlin 1908, p. 737—745; Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique, Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908), p. 399—442.

195) *E. Landau,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ann. 71 (1912), p. 548—564.

196) In den Unstetigkeitspunkten $x = p^m$ ist jedoch (64) divergent, während $\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}$ für alle $x > 0$ konvergiert.

197) *H. Cramér,* Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 104—130.

Veränderlichen, indem er insbesondere die Funktion

$$V(z) = \sum_{\gamma > 0} e^{\varrho z}$$

untersucht. Wird die z-Ebene längs der negativen imaginären Achse aufgeschnitten, so ist $V(z)$ im Innern der aufgeschnittenen Ebene meromorph und hat nur die singulären Stellen $z = \pm \log p^m$, welche Pole erster Ordnung sind. Hierdurch wird es möglich, auf die Reihe (64) den Konvergenzsatz von *M. Riesz* anzuwenden (vgl. Nr. 5). — Alle diese Erscheinungen deuten auf irgendeinen arithmetischen Zusammenhang zwischen den Nullstellen ϱ und den Primzahlen p hin.

Die Formeln (62) und (63) setzen die Hauptglieder der Funktionen $\Pi(x)$ bzw. $\psi(x)$ in Evidenz; wegen der nur bedingten Konvergenz der auftretenden Reihen läßt sich aus ihnen jedoch nicht einmal der Primzahlsatz *unmittelbar* erschließen. Zwar ist z. B. in $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ jedes Glied von der Form $o(x)$ — wenn die *Riemann*sche Vermutung wahr ist, sogar von der Form $O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ — wegen der Divergenz von $\sum \left|\frac{x^\varrho}{\varrho}\right|$ ist es aber nicht zulässig, unmittelbar hieraus $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho} = o(x)$ zu folgern.[198] *v. Koch*[199]) hat diese Formeln dadurch für asymptotische Zwecke verwerten können, daß er in die unendlichen Reihen konvergenzerzeugende Faktoren einführt und die Reihen dann durch endliche Summen ersetzt. Auf diese Weise ist es ihm gelungen, $\Pi(x)$ als Summe einer absolut konvergenten Reihe und eines beschränkten Fehlergliedes darzustellen, für $\psi(x)$ erhält er z. B. den Ausdruck

$$(65) \qquad \psi(x) = x - \sum_{|\varrho| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{3} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

Landau[200]) zeigt, daß diese Gleichung auch dann richtig bleibt, wenn

198) Die Ausführungen von *H. v. Mangoldt,* Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, Crelles J. 119 (1898), p. 65—71, enthalten nur einen Übergang von (45) zu (41).

199) *H. v. Koch,* Über die Riemannsche Primzahlfunction, Math. Ann. 55 (1902), p. 441—464; Contribution à la théorie des nombres premiers, Acta Math. 33 (1910), p. 293—320.

200) *E. Landau,* Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen, Acta Math. 35 (1911), p. 271—294. Vgl. auch *A. Hammerstein,* Zwei Beiträge zur Zahlentheorie, Diss., Göttingen 1919. — *Littlewood,* a. a. O. 111) hat sogar (ohne Beweis) die Formel

$$\psi(x) = x - \sum_{|\varrho| \leqq y} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\sqrt{x} \log x),$$

man den Γ-Faktor wegläßt. *Cramér*[186]) gibt die Formel

$$(66)\qquad \psi(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} e^{-\frac{|\gamma|}{x^3}} + O(\log^2 x),$$

wo die Reihe absolut konvergiert.

Wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, so kann aus (65), der entsprechenden *Landau*schen Formel, oder (66) sofort (58) erhalten werden. Unter derselben Voraussetzung folgt aus der *v. Mangoldt*schen Formel (63)

$$\psi(x) = x - 2\sqrt{x} \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} + O(\sqrt{x}).$$

Die hier auftretende Reihe stellt den „kritischen Teil" von $\psi(x)$ dar; wird jedes Glied mit dem entsprechenden $e^{-\gamma\sigma}$ multipliziert und $\log x = t$ gesetzt, so erhält man den imaginären Teil der Funktion von $s = \sigma + it$

$$\sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma s}.$$

Durch Betrachtung dieser Funktion beweist *Littlewood*[184]) unter Benutzung eines Satzes über diophantische Approximationen sein oben erwähntes, durch (60) ausgedrücktes Resultat.

Aus (62) erhält man mit Hilfe der Beziehung (vgl. Nr. 32)

$$(67)\qquad \bar{\pi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

eine explizite Formel für $\pi(x)$. Diese Formel hat früher die theoretische Stütze der (falschen) Vermutung (61) geliefert[201]), es läßt sich jedoch zur Zeit daraus nicht wesentlich mehr über $\bar{\pi}(x)$ folgern, als schon aus der einfacheren Beziehung

$$\bar{\pi}(x) = \Pi(x) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

folgt.

29. Theorie der L-Funktionen. Es sei $k > 1$ eine gegebene ganze Zahl; dann muß jede Primzahl, mit Ausnahme der endlich vielen in k aufgehenden, irgendeiner der $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen

---

gleichmäßig für $y \geq \sqrt{x}$, angegeben, deren Gültigkeit aber nur unter Voraussetzung der *Riemann*schen Vermutung behauptet wird.

201) *Riemann* (a. a. O. 95) sagt z. B. bei der Besprechung der Formel (67): „Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ (sein $F(x)$ ist unser $\bar{\pi}(x)$) ist also nur bis auf Größen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und gibt einen etwas zu großen Wert."

modulo k angehören. Schon von *Legendre*[202]) wurde (mit falschem Beweis) die Behauptung ausgesprochen, daß jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen — und sogar asymptotisch gleich viele wie jede andere — enthält. Für die erste Behauptung gab *Dirichlet*[203]) einen strengen Beweis, die zweite aber wurde erst von *Hadamard*[162]) und *de la Vallée Poussin*[204]) bewiesen. Bei diesen Untersuchungen treten als Hilfsmittel gewisse Funktionen auf, die auch bei verschiedenen anderen Fragen der analytischen Zahlentheorie eine Rolle spielen (vgl. Nr. **35, 40, 41**), und die deshalb jetzt besprochen werden müssen.

Die obengenannten $\varphi(k)$ Restklassen bilden in bezug auf die gewöhnliche Multiplikation eine *Abel*sche Gruppe. Es sei $X(K)$ irgendeiner der $\varphi(k)$ Charaktere der Gruppe (vgl. I A 6, Nr. **20**); diese Funktion nimmt für jede der fraglichen Restklassen K einen bestimmten Wert an, der übrigens immer eine $\varphi(k)$-te Einheitswurzel ist. Es sei nun die zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ folgendermaßen erklärt: für jedes n einer mit k gemeinteiligen Restklasse sei $\chi(n) = 0$; für jedes n einer zu k teilerfremden Restklasse K sei $\chi(n) = X(K)$. Unter den so eingeführten $\varphi(k)$ verschiedenen *Charakteren modulo k* zeichnet sich besonders der *Hauptcharakter* aus, der für jedes zu k teilerfremde n den Wert 1 hat. Um die verschiedenen Charaktere zu unterscheiden, bezeichnet man sie durch $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots \chi_{\varphi(k)}(n)$, wobei $\chi_1(n)$ immer der Hauptcharakter ist. Die Charaktere besitzen die folgenden vier Fundamentaleigenschaften:

$$\text{a)}\ \chi(n) = \chi(n') \quad \text{für} \quad n \equiv n' \pmod{k},$$

$$\text{b)}\ \chi(n) \cdot \chi(n') = \chi(nn'),$$

$$\text{c)}\ \sum_{n=1}^{k} \chi_\nu(n) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für} \quad \nu = 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \quad ^{205}),$$

202) *A.-M. Legendre,* a. a. O. 152a) p. 404; 152b) p. 77 und 99. Vgl. auch *A. Dupré*, Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, Paris 1859; *C. Moreau,* Extrait d'une lettre, Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 322—324; *A. Piltz,* a. a. O. 180).

203) *G. Lejeune-Dirichlet,* Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abh. Akad. Berlin 1837, math. Abhandl., p. 45—71 und Werke 1, p. 313—342.

204) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Deuxième partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20: 2 (1896), p. 281—362.

205) Hieraus folgt speziell, daß $\left|\sum_{1}^{N} \chi(n)\right|$ für jeden Nicht-Hauptcharakter

d) $\sum_{\nu=1}^{\varphi(k)} \chi_\nu(n) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } n \equiv 1 \pmod{k}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Die *Dirichlet*sche[203]) Reihe

$$L_\nu(s) = L(s, \chi_\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n)}{n^s} \tag{68}$$

ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent; wegen b) gilt auch dort

$$L_\nu(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_\nu(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{69}$$

Diese L-Funktionen können als Verallgemeinerungen von $\zeta(s)$ — die dem Falle $k = 1$ entspricht — angesehen werden und besitzen auch durchaus analoge Eigenschaften.[206]) Für den Fall des Hauptcharakters folgt unmittelbar

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{70}$$

($p \mid k$ bedeutet: p geht in k auf.) Die Funktion $L_1(s)$ läßt sich somit direkt auf $\zeta(s)$ zurückführen; sie besitzt wie diese in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung und ist sonst überall im Endlichen regulär. Für $\nu > 1$ folgt dagegen aus c), daß (68) für $\sigma > 0$ konvergiert und sogar für jeden Wert von s durch die *Cesàro*sche Methode summabel ist (vgl. Nr. **13**); für jedes vom Hauptcharakter verschiedene χ ist also $L(s)$ eine ganze transzendente Funktion.[207])

Dirichlet untersuchte die L-Funktionen nur für reelle s; verschiedene andere Verfasser[208]) haben dann auch komplexe s berücksichtigt und

---

unter einer nur von k abhängenden Schranke liegt. In der Tat gilt sogar $\left|\sum_{1}^{N} \chi(n)\right| < c\sqrt{k}\log k$, wo c eine absolute Konstante bedeutet. Vgl. *G. Pólya,* Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Göttinger Nachr. 1918, p. 21—29; *J. Schur,* Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn G. Pólya, Gött. Nachr. 1918, p. 30—36; *E. Landau,* Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Gött. Nachr. 1918, p. 79—97.

206) Eine ausführliche Darstellung der Theorie gibt *E. Landau,* Handbuch, § 95—140.

207) Dies folgt auch aus der Identität

$$L(s) = \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m + nk)^s} = k^{-s} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m)\, \zeta\left(\frac{m}{k}, s\right)$$

und den in Nr. **21** erwähnten Untersuchungen über $\zeta(w, s)$.

208) Vgl. *C. J. Malmstén,* Specimen analyticum etc., Diss., Upsala 1842 und De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, Crelles J. 38 (1849), p. 1—39; *R. Lipschitz,* a. a. O. 147); *H. Kinkelin,* Allgemeine Theorie der har-

die L-Funktionen auf die verallgemeinerten Zetafunktionen von Nr. **21** zurückgeführt. Aus diesen Untersuchungen geht vor allem hervor, daß jede L-Funktion eine Funktionalgleichung besitzt, die derjenigen von $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) analog gebaut ist. Wenn $\chi(n)$ einem sog. eigentlichen Charakter[209]) entspricht, so gilt in der Tat

$$(71) \qquad L(s) = \Theta \frac{\sqrt{k}}{\pi} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^s \sin\frac{\pi(s+\alpha)}{2}\, \Gamma(1-s)\bar{L}(1-s),$$

wo $\bar{L}(s)$ mit dem konjugiert komplexen Charakter $\bar{\chi}(n)$ gebildet ist, Θ eine Konstante vom absoluten Betrage 1 und $\alpha = 0$ oder 1 ist.[210]) Dies wird z. B. dadurch bewiesen, daß $L(s)$ durch die Funktion $\sum \chi(n) e^{-n^2 z}$ (für $\alpha = 0$) oder durch $\sum \chi(n) n e^{-n^2 z}$ für $(\alpha = 1)$ analog wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) ausgedrückt wird[211]), wonach die Funktionalgleichung aus der Transformationstheorie der Thetafunktionen folgt. — Gehört $L(s)$ dagegen zu einem uneigentlichen Charakter, so lassen sich immer ein echter Teiler k' von k und ein eigentlicher Charakter $\chi'(n)$ modulo k' derart angeben, daß für $\sigma > 1$

$$(72) \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi'(n)}{n^s} \cdot \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{\chi'(p)}{p^s}\right)$$

gilt.

In diesem Falle unterscheidet sich $L(s)$ also nur um einen trivialen Faktor von einer zu einem eigentlichen Charakter gehörigen L-Funktion (modulo k'); (70) stellt offenbar einen Spezialfall hiervon dar.

Jetzt können die Eigenschaften von $L(s)$ genau wie bei $\zeta(s)$ abgeleitet werden. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist $L(s) \neq 0$, für $\sigma < 0$ gibt es nur die vom Faktor $\sin\frac{\pi(s+\alpha)}{2}$ in (71) herrührenden „tri-

monischen Reihen, mit Anwendung auf die Zahlentheorie, Progr. d. Gewerbeschule, Basel 1862; *A. Piltz,* a. a. O. 180); *A. Hurwitz,* Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen auftreten; *M. Lerch,* a. a. O. 148). Bei *Hadamard,* a. a. O. 162) und *de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204), werden die früheren Resultate zusammengestellt und die Hilfsmittel der modernen Funktionentheorie zum erstenmal auf die L-Funktionen angewandt.

209) Ein Charakter $\chi(n)$ modulo k heißt *uneigentlich*, wenn es einen echten Teiler k' von k und einen Charakter $\chi'(n)$ modulo k' gibt, so daß für jedes n entweder $\chi(n) = 0$ oder $\chi(n) = \chi'(n)$ gilt. Sonst heißt $\chi(n)$ *eigentlich.* Der Hauptcharakter ist für $k > 1$ immer uneigentlich. Vgl. z. B. *Landau,* Handbuch, Bd. **1**, p. 478.

210) Nämlich $\alpha = 0$ im Falle $\chi(-1) = 1$, $\alpha = 1$ im Falle $\chi(-1) = -1$.

211) *de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204). Seine Darstellung wurde von *Landau,* a. a. O. 206) vereinfacht.

vialen" Nullstellen, auch der Punkt $s = 0$ kann unter Umständen Nullstelle sein. Im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ liegen unendlich viele von Null verschiedene Nullstellen $\varrho = \beta + \gamma i$, und die Anzahl $N(T)$ der ϱ, deren Ordinaten dem Intervall $0 < \gamma \leqq T$ angehören, ist gleich

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - cT + O(\log T),$$

wo c von k und χ abhängt.[212]) (Vgl. Nr. **16**.) Für jeden Nicht-Hauptcharakter gibt es eine Produktentwicklung[211])

$$L(s) = a s^{\mu} e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}, \tag{73}$$

wo μ ganz und $\geqq 0$ ist; beim Hauptcharakter muß auf der linken Seite das Produkt $(s-1)L(s)$ stehen (vgl. Nr. **15**).

Der für die Primzahltheorie besonders wichtige Satz, daß der Punkt $s = 1$ bei keiner L-Funktion eine Nullstelle ist, wurde schon von *Dirichlet*[203]) gefunden. Der Beweis ist ganz verschieden, je nachdem der Charakter ein *reeller* (d. h. ein für alle n reeller) oder ein *komplexer* (d. h. ein für wenigstens ein n nicht-reeller) ist. Im letzteren Falle wäre gleichzeitig mit $L(1)$ auch $\bar{L}(1)$ gleich Null, und die Funktionen $L(s)$ und $\bar{L}(s)$ wären nicht identisch. Dies wäre aber nicht mit der Identität

$$\prod_{r=1}^{\varphi(k)} L_{\nu}(s) = e^{\varphi(k) \sum\limits_{p^m \equiv 1 \pmod{k}} \frac{1}{m p^{ms}}}, \qquad (\sigma > 1)$$

verträglich, da die linke Seite für $s = 1$ eine Nullstelle hätte, während die rechte Seite für reelle $s > 1$ immer $\geqq 1$ ist. Für jeden komplexen Charakter gilt sogar[213])

$$\frac{1}{|L(1)|} < M \log k \, (\log \log k)^{\frac{3}{8}}$$

212) *E. Landau*, a. a. O. 107).

213) Vgl. *H. Gronwall*, Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, Palermo Rend. 35 (1913), p. 145—159; *E. Landau*, a) Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ann. 70 (1911), p. 69—78; b) Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, p. 285—295; c) Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 152—162. Bei diesen Abschätzungen von $\frac{1}{L(1)}$ als Funktion von k zeigt sich eine eigenartige Analogie mit der Abschätzung von $\zeta(1+ti)$ als Funktion von t (vgl. Nr. **18**). Für die reellen Charaktere wird das entsprechende Ergebnis (mit $\frac{1}{2}$ statt $\frac{3}{8}$) nur unter einer gewissen unbewiesenen Voraussetzung erhalten (vgl. Nr. **40**).

mit absolut konstantem M. — Bei den *reellen* Charakteren war der Beweis viel schwieriger; es war eben die Hauptleistung von *Dirichlet*[203]), $L(1)$ als Produkt von einer positiven Konstanten und einer gewissen Klassenzahl quadratischer Formen darzustellen (vgl. Nr. **40**); eo ipso war $L(1) \neq 0$. Vereinfachte Beweisanordnungen gaben *Mertens*[214]), *de la Vallée Poussin*[215]), *Teege*[216]) und *Landau*[217]), die den Beweis durch reihen- oder funktionentheoretische Überlegungen, ohne Benutzung der Theorie der quadratischen Formen, führten.[218])

Für jeden von $s = 1$ verschiedenen Punkt der Geraden $\sigma = 1$ läßt sich wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) $L(s) \neq 0$ nachweisen.[219]) Auch die entsprechenden schärferen Sätze gelten hier, es gibt z. B. eine absolute Konstante $a > 0$ derart, daß im Gebiete $\sigma > 1 - \frac{a}{\log|t|}$, $|t| > t_0$ keine Nullstellen von $L(s)$ liegen (vgl. Nr. **19**).[220]) Das Gegenstück der *Riemann*schen Vermutung wurde für die L-Funktionen von *Piltz*[180]) ausgesprochen. Da man im allgemeinen nicht weiß, ob Nullstellen auf der Strecke $0 < s < 1$ der reellen Achse liegen, und

---

214) *F. Mertens,* Über Dirichletsche Reihen, Sitzungsber. Akad. Wien 104 Abt. 2a (1895), p. 1093—1153; Über das Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen mit reellen Gliedern, ebenda 104 Abt. 2a, p. 1158—1166; Über Multiplikation und Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen, Crelles J. 117 (1897), p. 169—184; Über Dirichlets Beweis usw. Sitzungsber. Akad. Wien 106 Abt. 2a (1897), p. 254—286; Eine asymptotische Aufgabe, ebenda 108, Abt. 2a (1899), p. 32—37.

215) *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204) und Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique 53 (1895—1896), No. 6.

216) *H. Teege,* Beweis, daß die unendliche Reihe $\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$ einen positiven von Null verschiedenen Wert hat, Mitt. math. Ges. Hamburg 4 (1901), p. 1—11.

217) *E. Landau,* a. a. O. 29) und Über das Nichtverschwinden einer Dirichletschen Reihe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1906, p. 314—320.

218) Vgl. auch eine Bemerkung von *Remak* bei *E. Landau,* Über imaginärquadratische Zahlkörper mit gleicher Klassenzahl, Gött. Nachr. 1918, p. 277—284.

219) Hiermit hängt zusammen, daß die Reihe $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ und das Produkt in (69) auch noch für $\sigma = 1$ konvergieren (beim Hauptcharakter jedoch nur für $t \neq 0$) und daß (69) auch hier richtig bleibt (vgl. Nr. **14**). Ob diese Ausdrücke in der Halbebene $\sigma < 1$ einen einzigen Konvergenzpunkt besitzen, ist noch nicht entschieden. Vgl. *E. Landau,* a) Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression, Sitzungsber. Akad. Wien 112, Abt. 2a (1903), p. 493—535; b) Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550, wo eine Reihe früherer Arbeiten über den Gegenstand kritisiert werden; c) a. a. O. 178).

220) *E. Landau,* Handbuch, § 131, wo frühere Resultate desselben Verfassers verschärft werden.

da ferner nach (72) die imaginäre Achse unter Umständen unendlich viele Nullstellen enthalten kann, muß die Vermutung etwa so ausgesprochen werden: „für $\sigma > \frac{1}{2}$ ist $L(s) \neq 0$."[221]) Die Sätze von der Existenz unendlich vieler Nullstellen[222]) auf $\sigma = \frac{1}{2}$ und von der Häufung der Nullstellen in der Nähe dieser Geraden[223]) (vgl. Nr. **19**) gelten auch für die L-Funktionen.

Das Produkt zweier L-Reihen ist, sofern keine von ihnen einem Hauptcharakter entspricht, nach dem Satze von *Stieltjes* (vgl. Nr. **12**) für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergent. *Landau*[224]) beweist den folgenden Satz, der als Spezialfall eine Verschärfung hiervon enthält: Es seien $\chi_1(n)$ und $\chi_2(n)$ zwei beliebige[225]) Charaktere modulo k_1 bzw. k_2. Dann gibt es zwei Konstanten A und B, so daß die *Dirichlet*sche Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum \frac{\chi_1(n)}{n^s} \cdot \sum \frac{\chi_2(n)}{n^s} + A \sum \frac{\log n}{n^s} + B \sum \frac{1}{n^s}$$
$$= L_1(s) L_2(s) - A\zeta'(s) + B\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{3}$ konvergiert. Hierbei ist $A = B = 0$, wenn weder χ_1 noch χ_2 Hauptcharakter ist, und $A = 0$, wenn nur einer von den beiden Hauptcharakter ist. Dieser Satz hat wichtige Anwendungen auf verschiedene zahlentheoretische Probleme (vgl. Nr. **34** und **35**).

30. Die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Reihe. Nach (69) gilt für $\sigma > 1$

$$(74)\qquad \begin{cases} \log L(s) = \sum\limits_{p,\,m} \dfrac{\chi(p^m)}{m\,p^{ms}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} \\[2ex] -\dfrac{L'}{L}(s) = \sum\limits_{p,\,m} \dfrac{\chi(p^m)\log p}{p^{ms}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach den Eigenschaften b) und d) der Charaktere, wenn

---

221) Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wahrheit dieser Vermutung gab neuerdings *H. Bohr* mit Hilfe des von ihm eingeführten Begriffes „Quasiperiodizität einer *Dirichlet*schen Reihe": Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen, Math. Ann. 85 (1922), p. 115—122. — *J. Großmann* hat die Vermutung durch numerische Untersuchungen gestützt: Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen, Diss., Göttingen 1913.

222) *E. Landau,* a. a. O. 135).

223) *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 65).

224) *E. Landau,* Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Gött. Nachr. 1912, p. 687—771.

225) Hier soll also $\chi_1(n)$ nicht wie oben notwendig den Hauptcharakter bezeichnen.

l eine beliebige zu k teilerfremde ganze Zahl bedeutet,

$$(75)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \dfrac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} = \dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\nu=1}^{\varphi(k)} \dfrac{1}{\chi_\nu(l)} \log L_\nu(s) \\ \sum\limits_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \dfrac{\Lambda(n)}{n^s} = -\dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\nu=1}^{\varphi(k)} \dfrac{1}{\chi_\nu(l)} \cdot \dfrac{L_\nu'}{L_\nu}(s). \end{cases}$$

In beiden Gleichungen (75) wird die rechte Seite bei Annäherung an $s = 1$ unendlich, da dieser Punkt für $L_1(s)$ ein Pol, für die übrigen $L_\nu(s)$ dagegen weder Pol noch Nullstelle ist. Daraus schloß *Dirichlet*[203]), daß in der arithmetischen Reihe $l, l+k, l+2k, \ldots$ unendlich viele Primzahlen vorkommen; sonst würden ja in der Tat die linken Seiten von (75) für alle s endlich bleiben.[226])

Mit Hilfe der tieferen Eigenschaften der L-Funktionen konnten *Hadamard*[162]) und *de la Vallée Poussin*[204]) die dem Primzahlsatz entsprechenden Sätze

$$(76)\quad \begin{cases} \pi_{k,l}(x) = \sum\limits_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} 1 \sim \dfrac{1}{\varphi(k)} Li(x), \\ \psi_{k,l}(x) = \sum\limits_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) \sim \dfrac{1}{\varphi(k)} x \end{cases}$$

beweisen. Das Hauptargument beim Beweise bildet der in der vorigen Nummer erwähnte Satz: $L_\nu(1+ti) \neq 0$ für alle ν und alle reellen t. Von *Landau*[227]) wurden die Beweise vereinfacht und die Resultate verschärft, so daß das beste mit Sicherheit bekannte Resultat[228]) so lautet:

$$(77)\quad \begin{cases} \pi_{k,l}(x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} Li(x) + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \\ \psi_{k,l}(x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} x + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \end{cases}$$

mit absolut konstantem, d. h. von k und l unabhängigen, α. Die

226) In mehreren speziellen Fällen läßt sich der *Dirichlet*sche Satz elementar beweisen. Vgl. z. B. *L. E. Dickson*, History of the theory of numbers, Bd. 1, Washington 1919, p. 419.

227) *E. Landau*, Über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideale in einer Idealklasse, Sitzungsber. Akad. Wien **117**, Abt. 2a (1908), p. 1095—1107; a. a. O. 219a); a. a. O. 107); Handbuch, § 119—121, § 131—132.

228) Wäre die verallgemeinerte *Riemann*sche Vermutung für die L-Funktionen bewiesen, so würden natürlich für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe zu (57) und (58) analoge Beziehungen gelten. Vgl. *E. Landau*, Handbuch, § 239 und a. a. O. 178).

Hauptglieder rühren natürlich von den Singularitäten von $\log L_1(s)$ bzw. $\frac{L_1'}{L_1}(s)$ in $s = 1$ her. Aus (76) folgt speziell, wenn l_1 und l_2 beide zu k teilerfremd sind,

$$\pi_{k, l_1}(x) \sim \pi_{k, l_2}(x),$$

d. h. die zweite in der vorigen Nummer genannte *Legendre*sche Behauptung. — Die *Riemann-v. Mangoldt*sche Primzahlformel (vgl. Nr. 28) läßt sich auch für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe verallgemeinern.[229]) Zunächst gilt für einen beliebigen Charakter $\chi_\nu(n)$ (vgl. (73))[230])

$$\sum_{n \leqq x} \chi_\nu(n) \Lambda(n) - \frac{1}{2} \chi_\nu(x) \Lambda(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \frac{x^s}{s} \cdot \frac{L_\nu'}{L_\nu}(s)\, ds \tag{78}$$

$$= \varepsilon_\nu x - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha - 2n}}{\alpha - 2n} + a_0 + a_1 \log x,$$

wo a_0 und a_1 von x unabhängig sind. ε_ν bedeutet Eins für $\nu = 1$, sonst Null. Aus (75) kann man jetzt, nach dem Eindeutigkeitssatz der *Dirichlet*schen Reihen, (vgl. Nr. 3) eine explizite Formel für die Funktion

$$\psi_{k, l}(x) = \tfrac{1}{2}(\psi_{k, l}(x + 0) + \psi_{k, l}(x - 0))$$

erhalten.

Die bisher erwähnten Resultate laufen alle darauf hinaus, daß die Primzahlen auf die $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen *gleichmäßig* verteilt sind. Schon *Tschebyschef*[231]) behauptete — freilich nur für den Fall $k = 4$ — dies könne nur bis zu einer bestimmten Grenze gelten, indem die Reihe $4n + 3$ „viel mehr" Primzahlen als die Reihe $4n + 1$ ($n = 1, 2, \ldots$) enthalte. Er sprach (ohne Beweis) den Satz aus: es gibt eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_\nu \to \infty$, derart, daß für wachsendes ν

$$\pi_{4,3}(x_\nu) - \pi_{4,1}(x_\nu) \sim \frac{\sqrt{x_\nu}}{\log x_\nu} \tag{79}$$

gilt. Dies wurde zuerst von *Phragmén*[181]) und dann einfacher von

229) Vgl. *A. Piltz*, a. a. O. 180) und *G. Torelli*, a. a. O. 159), Nuove formole per calcolare la totalità dei numeri primi etc., Rend. Accad. sc. fis. mat. Napoli (3) 10 (1904), p. 350—362 und (3) 11 (1905), p. 101—109. Vollständig ausgeführt wurde der Beweis erst von *E. Landau*, a. a. O. 194) und Handbuch, § 133—138.

230) Für nicht ganze x bedeuten $\chi(x)$ und $\Lambda(x)$ Null.

231) *P. Tschebyschef*, Lettre à M. Fuss, Bull. cl. phys.-math. Acad. St. Petersburg 11 (1853), p. 208 und Œuvres 1, p. 697—698; Sur une transformation de séries numériques, Nouv. corr. math. 4 (1878), p. 305—308 und Œuvres 2, p. 705—707.

Landau[183]) bewiesen; aus den Untersuchungen von *Littlewood*[184]) folgt aber, daß die obige Differenz, bei zweckmäßiger Wahl von K, für beliebig große Werte von x sowohl $> K\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x$ als auch $< -K\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x$ wird. Der Zusammenhang wird gewissermaßen durch die aus (78) folgenden Gleichungen

$$\vartheta_{4,1}(x) = \frac{1}{2}x - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}}{\varrho} + \sum_{\varrho'}\frac{x^{\varrho'}}{\varrho'}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\vartheta_{4,3}(x) = \frac{1}{2}x \qquad - \frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \sum_{\varrho'}\frac{x^{\varrho'}}{\varrho'}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

aufgeklärt. (Es ist $\vartheta_{k,l} = \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \pmod{k}}}\log p$ gesetzt; ϱ durchläuft die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ und ϱ' diejenigen von

$$L(s) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ den Nicht-Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet.) Die oszillierenden Glieder sind hier zwar von höherer Größenordnung als $x^{\frac{1}{2}}$, in der ersten Gleichung tritt aber ein Glied $-x^{\frac{1}{2}}$ *von konstantem Vorzeichen* auf, was wiederum daraus folgt, daß alle *Primzahlquadrate* ($2^2 = 4$ ausgenommen) von der Form $4n+1$ sind.

Tschebyschef[231]) behauptete auch: „wenn c gegen Null abnimmt, so gilt

$$(80)\quad e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - \cdots = -\sum_{p}\chi(p)e^{-pc} \to \infty.“$$

Von *Hardy-Littlewood*[232]) und *Landau*[233]) wurde gezeigt, daß dieser Satz mit dem folgenden (unbewiesenen) Analogon der *Riemann*schen Vermutung äquivalent ist: „Die zum Nicht-Hauptcharakter modulo 4 gehörige L-Funktion ist für $\sigma > \frac{1}{2}$ von Null verschieden.“

Die allgemeine *Tschebyschef*sche Aussage: „es gibt viel mehr Primzahlen von der Form $4n+3$ als von der Form $4n+1$“ kann also jedenfalls nur in ziemlich beschränktem Maße wahr sein[234]) und

232) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31b). (Aus $L(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt (80)).

233) *E. Landau,* a. a. O. 178). (Aus (80) folgt $L(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$) und Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, zweite Abhandl., Math. Ztschr. 1 (1918), p. 213—219.

234) *E. Landau,* a. a. O. 178), p. 6, bemerkt, daß aus der Behauptung (80) von *Tschebyschef,* $\pi_{4,3}(x) - \pi_{4,1}(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)$ folgt. Die Differenz $\pi_{4,3} - \pi_{4,1}$

ist z. B. in der Fassung (80), die wenigstens wahr sein *könnte*, noch nicht bewiesen.

Die Resultate von *Phragmén* und *Landau* betreffend die *Tschebyschef*sche Behauptung (79) wurden von *Landau*[235]) für beliebige Moduln k (an der Stelle von 4) verallgemeinert.

31. Andere Primzahlprobleme. *Summen über Primzahlen.* Daß unter den n ersten ganzen Zahlen annäherungsweise $Li(n)$ Primzahlen vorkommen, kann wegen

$$Li(n) = \sum_{2}^{n} \frac{1}{\log n} + O(1)$$

in ungenauer Weise so ausgedrückt werden: „die Wahrscheinlichkeit, daß die beliebig gewählte Zahl n Primzahl ist, ist gleich $\frac{1}{\log n}$." Man wird hiernach vermuten, daß die beiden Reihen

$$(81) \qquad \sum_{p} F(p) \quad \text{und} \quad \sum_{n} \frac{F(n)}{\log n}$$

sich mehr oder weniger ähnlich verhalten müssen. In der Tat besagt ja der Primzahlsatz

$$\sum_{p \leqq x} 1 \sim \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}, \qquad (F(t) = 1)$$

bzw.

$$\sum_{p \leqq x} \log p \sim \sum_{n=2}^{x} 1, \qquad (F(t) = \log t).$$

Nach *Tschebyschef*[236]) sind die Reihen (81) gleichzeitig konvergent oder divergent, sobald $\frac{F(n)}{\log n}$ für hinreichend große n positiv und nie zunehmend ist. *Mertens*[237]) beweist

$$(82) \quad \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n} + O(1) = \log x + O(1) \qquad \text{und}$$

$$(83) \quad \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n \log n} + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = \log\log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

---

wäre also nach (80) absolut genommen kleiner, als bisher bekannt war — nämlich $O\left(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}\right)$ — eine Folgerung, die ja in der entgegengesetzten Richtung von *Tschebyschefs* Interpretation seiner Behauptung liegt.

235) *E. Landau*, Handbuch, § 200.

236) *P. Tschebyschef*, a. a. O. 155b).

237) *F. Mertens*, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Crelles J. 78 (1874), p. 46—62.

mit konstantem A und B. Von *de la Vallée Poussin*[173]) wurde (82) zu

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x - C - \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

verschärft, wo C die *Euler*sche Konstante bezeichnet. Die Abschätzung des Restgliedes in (83) kann in ähnlicher Weise verschärft werden. Hieraus folgt speziell

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log x - \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x\right) = C$$

und (vgl. (59))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} = -2C.$$

Landau[238]) gibt verschiedene Sätze über Summen der Gestalt $\sum_{p \leq x} F(p)$ und $\sum_{p \leq x} F(p, x)$ und bespricht insbesondere die Möglichkeit, von einer Formel elementar zu den andern zu gelangen, ohne jedes Mal die Theorie der Zetafunktion zu benutzen (vgl. hierzu Nr. **33**). *Mertens*[237]) hat (82) und (83) auch für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe verallgemeinert.

Die Konvergenz von $\sum p^{-s}$ und $\sum \chi(p) p^{-s}$ auf der Geraden $\sigma = 1$ wurde schon oben besprochen (vgl. Nr. **14** und Nr. **29**, Fußnote 219). Diese Reihen stellen für $\sigma > 1$ die Funktionen dar

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns) \quad \text{bzw.} \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log L(ns, \chi^n),$$

die über $\sigma = 1$ hinaus bis zu $\sigma = 0$, aber nicht weiter, analytisch fortgesetzt werden können.[239]) — Die Funktion

$$F(z) = \sum_p \frac{z^p}{p}$$

wird bei Annäherung an einen „rationalen" Punkt $z = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ des Einheitskreises unendlich groß, sofern n eine quadratfreie Zahl ist.

---

238) *E. Landau,* Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers, Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 25—38; Handbuch § 55—56 (vgl. auch p. 889).

239) *E. Landau* und *A. Walfisz,* Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen, Palermo Rend. 44 (1920), p. 82—86.

Vgl. auch *J. C. Kluyver*, Benaderingsformules betreffende de priemgetallen beneden eene gegeven grens, Akad. Wetensk. Amsterdam, Verslagen 8 (1900), p. 672—682 und *E. Landau*, a. a. O.78).

Fatou[240]) schließt hieraus, daß $F(z)$ und

$$zF'(z) = \sum_p z^p$$

nicht über den Einheitskreis fortgesetzt werden können. Nach einer Bemerkung von *Landau*[241]) folgt dies auch direkt aus neueren Sätzen über die *Taylor*sche Reihe.

Die n^{te} Primzahl und die Differenz $p_{n+1} - p_n$. Wenn p_n die n^{te} Primzahl bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$n = \pi(p_n) = Li(p_n) + O\left(p_n e^{-\alpha\sqrt{\log p_n}}\right)$$

durch Inversion

$$p_n = Li^{-1}(n) + O\left(n \log^2 n\, e^{-\alpha\sqrt{\log n}}\right),$$

wo $Li^{-1}(x)$ die zu $Li(x)$ inverse Funktion bedeutet. Insbesondere ist[242]) also

$$p_n \sim n \log n.$$

Tschebyschef[236]) bewies den früher von *Bertrand*[243]) vermuteten und empirisch bestätigten Satz, daß von einer gewissen Stelle an zwischen x und $2x$ wenigstens eine Primzahl liegt, d. h. daß für große n immer $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 2$ ist. Der Primzahlsatz gibt sogar[244])

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$$

oder

$$p_{n+1} - p_n = o(p_n).$$

Aus der genauen Restabschätzung (53) zum Primzahlsatz folgt[245])

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n e^{-\alpha\sqrt{\log p_n}}\right),$$

240) *P. Fatou*, Sur les séries entières à coefficients entiers, Paris C. R. 138 (1904), p. 342—344.

241) *E. Landau*, a. a. O. 78). Dieselbe Bemerkung hat auch *F. Carlson* gemacht: Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 1—13.

242) Mit der asymptotischen Darstellung von p_n beschäftigten sich u. a. *M. Perwuschin*, Formule pour la détermination approximative des nombres premiers etc., Verhandl. Math.-Kongr. Zürich 1897, Leipzig 1898, p. 166—167; *E. Cesàro*, Sur une formule empirique de M. Pervouchine, Paris C. R. 119 (1894), p. 848—849; *M. Cipolla*, La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo, Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli (3) 8 (1902), p. 132—166. Vgl. auch *E. Landau*, Handbuch, § 57.

243) *J. Bertrand*, Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu' elle renferme, J. Éc. Polyt. 18 (1845), p. 123—140.

244) Ein direkter Beweis dieser Tatsache, der nicht zugleich den Primzahlsatz liefert, scheint nicht bekannt zu sein. Vgl. *E. Landau*, Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, Proc. Fifth. Intern. Congr. Math., Cambridge 1913, 1 p. 93—108.

245) Vgl. *Ch. de la Vallée Poussin*, a. a. O. 173), p. 55.

was die beste mit Sicherheit bekannte Abschätzung darstellt. Wenn die *Riemann*sche Vermutung vorausgesetzt wird, folgt aus (57)

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log^2 p_n),$$

wo nach *Cramér*[246]) $\log^2 p_n$ durch $\log p_n$ ersetzt werden kann. Es gibt demnach, wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, eine Zahl c, so daß für $n = 2, 3, \ldots$ zwischen n^2 und $(n + c \log n)^2$ immer wenigstens eine Primzahl liegt. *Oppermann*[247]) behauptete, daß dasselbe von dem Intervall $(n^2, (n+1)^2)$ gilt; das ist aber bisher nicht entschieden. *Piltz*[248]) hat sogar die Behauptung

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^\varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$, ausgesprochen; in dieser Hinsicht ist nur bekannt[249]), daß die Anzahl der $p_n \leqq x$, die der Ungleichung

$$p_{n+1} - p_n > p_n^k, \qquad (0 < k \leqq \tfrac{1}{2})$$

genügen, unter Voraussetzung der *Riemann*schen Vermutung von der Form $O\left(x^{1 - \frac{3}{2}k + \varepsilon}\right)$ ist. — Im Mittel muß die Differenz $\delta_n = p_{n+1} - p_n$ von der Ordnung $\log p_n$ sein, denn es gilt

$$\frac{1}{n}(\delta_1 + \delta_2 + \cdots \delta_n) = \frac{1}{n}(p_{n+1} - 2) \sim \log p_n.$$

Nach unten ist keine bessere Abschätzung als die triviale $\delta_n \geqq 2$ für $n > 1$ bekannt; verschiedene Verfasser[250]) vermuten, daß in der Tat

$$p_{n+1} - p_n = 2 \tag{84}$$

---

246) *H. Cramér,* a. a. O. 186).

247) *L. Oppermann,* Om vor Kundskab om Primtallenes Mœngde mellem givne Grœnser, Overs. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1882, p. 169—179.

248) *A. Piltz,* a. a. O. 180), p. 46.

249) *H. Cramér,* On the distribution of primes, Proc. Cambr. Phil. Soc. 20 (1921), p. 272—280.

250) Vgl. *J. J. Sylvester,* On the partition of an even number into two primes, Proc. London math. Soc. (1) 4 (1871), p. 4—6 und Collected Math. Pap. 2, p. 709—711; On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers, Nature 55 (1896—1897), p. 196—197, 269 und Pap. 4. p. 734—737; *P. Stäckel,* Über Goldbachs empirisches Theorem etc., Gött. Nachr. 1896, p. 292—299; Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen, Sitzungsber. Akad. Heidelberg 1916; Die Lückenzahlen r^{ter} Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen. I—III, Sitzungsber. Akad. Heidelberg 1917—1918; *J. Merlin,* Un travail sur les nombres premiers, Bull. sc. math. (2) 39 (1915), p. 121—136; *V. Brun,* Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Arch. for. Math. og Naturv., Kristiania 34, Nr. 8 (1915); Sur les nombres premiers de la forme $ap + b$, ebenda 34, Nr. 14 (1917), *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Note on Messrs Shah and Wilson's paper entitled: On an empirical formula connected with Goldbach's

für unendlich viele n gilt, und sogar daß

$$h(x) \sim a \frac{x}{\log^2 x}$$

mit konstantem a ist, wenn $h(x)$ die Anzahl der $p_n \leqq x$ bedeutet, die (84) genügen. *Brun*[251]) beweist

$$h(x) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Der Satz von Goldbach und verwandte Fragen. Goldbach[252]) sprach im Jahre 1742 den bis jetzt unbewiesenen Satz aus: „Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.“ Verschiedene Verfasser[250]) vermuteten, daß die Anzahl $G(n)$ solcher Darstellungen einer geraden Zahl n sogar mit n ins Unendliche wächst, und zwar so, daß für alle geraden n

$$G(n) > b \frac{n}{\log^2 n}$$

mit konstantem b gilt.[253]) *Hardy* und *Littlewood*[250]) verallgemeinern das Problem und greifen es zuerst mit analytischen Mitteln an, indem sie in der Potenzreihe

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} z^n = \left(\sum_p \log p\, z^p\right)^k,$$

(die über den Einheitskreis nicht fortsetzbar ist) ein beliebiges $a_n^{(k)}$ durch das Integral

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r < 1} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

ausdrücken, um dann das Verhalten von $a_n^{(k)}$ für große n zu untersuchen. (Auf diese Methode kommen wir in Nr. 38 zurück.) Die Be-

theorem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1919), p. 245—254; Some problems of Partitio Numerorum; III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta math. 44 (1922), p. 1—70.

251) *V. Brun*, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Vidensk. selsk. Skrifter, Mat-naturv. Kl. Kristiania 1920, Nr. 3 und Paris C. R. 168 (1919), p. 544—546. Vgl. auch: La série $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ où les dénominateurs sont „nombres premiers jumeaux“ est convergente ou finie, Bull. sc. Math. (2) 43 (1919), p. 1—9.

252) Vgl. Briefwechsel zwischen *Euler* und *Goldbach* bei *P. H. Fuss*, Correspondance math. phys. 1, St. Petersbourg 1843, p. 127, 135. Vgl. in bezug auf die ältere Geschichte des Satzes *L. E. Dickson*, a. a. O. 226), p. 421—425. Über die numerische Prüfung des Satzes vgl. z. B. *P. Stäckel*, a. a. O. 250). — Für $n = 2$ kann der Satz offenbar nur richtig sein, wenn 1 als Primzahl mitgezählt wird.

253) *E. Landau*, Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz, Gött. Nachr. 1900, p. 177—186, zeigt, daß $G(2) + \cdots G(n) \sim \frac{n^2}{2 \log^2 n}$ ist. Hieraus folgt, daß eine früher von *Stäckel*, a. a. O. 250), vorgeschlagene Formel falsch ist.

hauptung von *Goldbach*, $a_n^{(2)} > 0$ für alle geraden $n > 2$, läßt sich zwar nicht beweisen, es wird aber die Formel[254])

$$G(n) \sim c \frac{n}{\log^2 n} \prod_q \frac{q-1}{q-2}, \qquad (n \text{ gerade})$$

als wahrscheinlich hingestellt. Hierin ist c konstant, und q durchläuft die ungeraden Primteiler von n. Wenn die (unbewiesene) Annahme gemacht wird, daß *die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *und von allen L-Funktionen kleiner als* $\frac{3}{4}$ *ist*, so läßt sich der folgende Satz beweisen: „Jede hinreichend große *ungerade* Zahl kann als Summe von *drei* Primzahlen dargestellt werden." — *Brun*[251]) beweist durch Anwendung einer Modifikation des sog. Siebverfahrens von *Eratosthenes* den Satz: „Jede hinreichend große gerade Zahl kann als Summe von zwei ganzen Zahlen dargestellt werden, die höchstens je neun Primfaktoren enthalten." Die beiden letztgenannten Sätze sind offenbar direkte Folgerungen aus dem *Goldbach*schen.

Das Problem, die Bedingungen für die Lösbarkeit einer unbestimmten Gleichung $ax + by + c = 0$ mittelst zweier Primzahlen x und y zu finden, ist eine Verallgemeinerung des *Goldbach*schen; es wurde auch von den oben erwähnten Verfassern behandelt. Mit der *Hardy-Littlewood*schen Methode lassen sich endlich auch verschiedene Probleme der Art: „Gibt es unendlich viele Primzahlen von der Form $n^2 + 1$, von der Form $n'^3 + n''^3 + n'''^3$," usw., angreifen. Auch hier läßt sich nichts beweisen, die Methode führt aber auf gewisse asymptotische Formeln, die in mehreren Fällen mit gutem Erfolg numerisch geprüft wurden.

IV. Weitere zahlentheoretische Funktionen.[255])

32. Die Funktionen $\mu(n)$, $\lambda(n)$ und $\varphi(n)$. Für $\sigma > 1$ gilt (vgl. Nr. 22)

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}. \tag{85}$$

Die für $\sigma > 1$ unbedingt konvergente Reihe $\sum \mu(n) n^{-s}$ stellt also eine für $\sigma \geq 1$ reguläre Funktion dar; daß die Reihe auch noch für

254) Mehr oder weniger ähnliche Formeln waren von den oben erwähnten Verfassern schon früher vorgeschlagen worden. Die *Hardy-Littlewood*sche Formel wurde von *N. M. Shah* und *B. M. Wilson* numerisch geprüft: On an empirical formula connected with Goldbach's theorem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1919), p. 238—244.

255) Betreffs älterer Untersuchungen zu diesem Kapitel sei auf I C 3 verwiesen.

$s = 1$ konvergiert, hat schon *Euler*[256]) vermutet. Dies wurde von *v. Mangoldt*[257]) unter Benutzung der *Hadamard*schen Sätze über die Produktzerlegung von $(s-1)\zeta(s)$ (vgl. Nr. **15**) bewiesen; nach (85) ist dann

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0, \quad \text{d. h.} \quad g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(n)}{n} = o(1).$$

Landau[258]) zeigt, daß dieses Resultat auch elementar aus dem Primzahlsatz abgeleitet werden kann (vgl. Nr. **33**). Eine unmittelbare Folgerung ist

$$M(x) = \sum_1^x \mu(n) = o(x),$$

und man kann nun nach dem Konvergenzsatz von *M. Riesz* (vgl. Nr. **5**) schließen, daß (85) auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ gültig bleibt.[259]) *Landau*[260]) hat sogar die Konvergenz von

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)(\log n)^q}{n^{1+ti}}$$

für beliebige reelle q und t festgestellt. Er[261]) gab — mit seiner bei dem Primzahlsatz angewandten Methode — die Abschätzungen

$$(86)\quad \begin{cases} M(x) = O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \\ g(x) = O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \\ \displaystyle\sum_1^x \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1 + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \end{cases}$$

256) *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum, 1, Lausanne 1748, p. 229.

257) *H. v. Mangoldt,* Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$, Sitzungsber. Akad. Berlin 1897, p. 835—852.

258) *E. Landau,* Neuer Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$, Diss. Berlin 1899.

259) Vgl. *Landau,* a. a. O. 21). Das war natürlich nicht der erste Beweis dieses Satzes.

260) *E. Landau,* Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$, Sitzungsber. Akad. Wien 112, Abt. 2a (1903), p. 537—570. Die Konvergenz von $\sum \frac{\mu(n)\log n}{n}$ wurde schon von *A. F. Möbius* vermutet: Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen, Crelles J. 9 (1832), p. 105—123 und Werke 4 (1887), p. 589—612.

261) *E. Landau,* a. a. O. 29) und Handbuch, § 163—164. *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 173), hatte eine unschärfere Abschätzung gegeben.

und verallgemeinerte[262]) alle diese Resultate für den Fall, daß n nur die Zahlen einer arithmetischen Reihe durchläuft.

Wie bei dem Primzahlsatz, so ist bei den Gleichungen (86) die Frage nach der möglichen Verschärfung der Abschätzungen eng mit der *Riemann*schen Vermutung verbunden. Von *Stieltjes*[263]) und *Mertens*[264]) wurde

$$(87) \qquad M(x) = O(\sqrt{x})$$

vermutet; *Stieltjes* behauptete in der Tat auf diesem Wege die *Riemann*sche Vermutung bewiesen zu haben, denn aus (87) würde (vgl. Nr. 2) die Konvergenz von $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, und damit die *Riemann*sche Vermutung, folgen. — Daß auch umgekehrt aus der *Riemann*schen Vermutung die Konvergenz von $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt, wurde zuerst von *Littlewood*[138]) im Laufe seiner in Nr. **20** besprochenen Untersuchungen über die Zetafunktion bewiesen. Demnach ist die *Riemann*sche Vermutung mit der Behauptung

$$(88) \qquad M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0$$

vollständig äquivalent.[265]) Die weitere Vermutung von *Stieltjes*[263]) daß $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ auch noch für $s = \frac{1}{2}$ konvergiert, ist aber nach *Landau*[178]) sicher nicht richtig. A fortiori kann also (88) für kein negatives ε gelten.

Aus (85) folgt $\sum_1^\infty n^{-s} \cdot \sum_1^\infty \mu(n) n^{-s} = 1$ und hieraus für jedes ganze $n > 1$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0,$$

---

262) Vgl. *J. C. Kluyver*, Reeksen, afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$, Akad. Wetensk. Amsterdam, Verslagen 12 (1904), p. 432—439, und *E. Landau,* Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn Kluyver etc., ebenda 13 (1905), p. 71—83, Handbuch, § 169—175.

263) *T. J. Stieltjes*, a. a. O. 160), Lettre 79 und Sur une fonction uniforme, Paris C. R. 101 (1885), p. 153—154.

264) *F. Mertens*, Über eine zahlentheoretische Funktion, Sitzungsber. Akad. Wien 106, Abt. 2a (1897), p. 761—830. Über die numerische Prüfung dieser Vermutung vgl. etwa *R. D. v. Sterneck*, Sitzungsber. Akad. Wien 110, Abt. 2a (1901), p. 1053—1102.

265) Aus (87) würde dagegen mehr als die *Riemann*sche Vermutung folgen, z. B. daß alle Wurzeln von $\zeta(s)$ einfach sind. Vgl. auch *H. Cramér* und *E. Landau*, Über die Zetafunktion auf der Mittellinie des kritischen Streifens, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 15 (1921), Nr. 28.

sowie für jedes $x \geqq 1$
$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1.$$
Auf diesen Eigenschaften von $\mu(n)$ beruhen die sog. zahlentheoretischen Umkehrungsformeln. Es läßt sich z. B. die Gleichung (67), Nr. 28, leicht aus ihnen ableiten.

Die Funktion $\lambda(n)$ ist durch
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad (\sigma > 1)$$
definiert; es folgt hieraus
$$\sum_{1}^{x} \lambda(n) = \sum_{1}^{\sqrt{x}} M\left(\frac{x}{n^2}\right).$$
und mit Hilfe dieser Identität lassen sich alle obigen Ergebnisse für $\lambda(n)$ verallgemeinern.[266] Insbesondere zeigt es sich, daß es unter den N ersten ganzen Zahlen asymptotisch ebenso viele gibt, die aus einer geraden, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren bestehen.[267]

Für die *Euler*sche Funktion $\varphi(n)$ gilt offenbar immer $\varphi(n) \leqq n-1$, und sobald n eine Primzahl ist, muß hier das Gleichheitszeichen benutzt werden. Andererseits beweist *Landau*[268]
$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(n) \log\log n}{n} = e^{-C}.$$
Daß die summatorische Funktion $\Phi(x)$ asymptotisch gleich $\frac{3}{\pi^2}x^2$ ist, war schon *Dirichlet*[269] bekannt; nach *Mertens*[270] gilt sogar
$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \log x),$$
was völlig elementar bewiesen werden kann. Merkwürdigerweise ist es bisher nicht gelungen, aus der Beziehung $\sum_{1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ mit analytischen Mitteln eine bessere Abschätzung des Restgliedes zu

266) *E. Landau*, Handbuch, § 166—167, 169—172.

267) *E. Landau*, Handbuch, p. 571.

268) *E. Landau*, Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$, Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 86—91.

269) *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie, Abhandl. Akad. Berlin 1849, math. Abhandl. p. 69—83 (Werke 2, p. 49—66).

270) *F. Mertens*, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Crelles J. 77 (1874), p. 289—338.

erhalten.[271]) — Nach *Landau*[272]) gilt

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x .$$

Landau[273]) beweist mit Hilfe der Theorie der Multiplikation *Dirichlet*scher Reihen (vgl. Nr. **12**) die Konvergenz verschiedener hierhergehöriger Reihen, z. B.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\mu(n)}{n}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\lambda(n)}{n}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\varphi(n)}{n^2},$$

wo $\chi(n)$ ein beliebiger Charakter (bei der letztgenannten Reihe jedoch nicht der Hauptcharakter) nach einem beliebigen Modul ist.

33. Zusammenhangssätze. Die im vorhergehenden erwähnten tieferen Ergebnisse der analytischen Zahlentheorie waren alle mit Hilfe der Theorie der Zetafunktion, bzw. deren Verallgemeinerungen, erreicht. Für die systematische Darstellung der Theorie erscheint es wichtig, die verschiedenen Hauptresultate in bezug auf ihre „Tiefe" zu vergleichen und insbesondere die Möglichkeit zu untersuchen, aus einem von ihnen die anderen *elementar* abzuleiten, ohne nochmals die transzendenten Methoden zu benutzen.

Die wichtigsten in dieser Richtung durch *Landau*[274]) und *Axer*[275]) bekannten Tatsachen lassen sich dahin zusammenfassen, daß die vier Gleichungen

$$\psi(x) = \sum_{1}^{x} \Lambda(n) = x + o(x), \tag{89}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} = -2C, \tag{90}$$

$$M(x) = \sum_{1}^{x} \mu(n) = o(x), \tag{91}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0, \tag{92}$$

---

271) Da $\Phi(x)$ unendlich viele Sprünge von der Größenordnung x macht, kann das Restglied jedenfalls nicht von niedrigerer Größenordnung als $O(x)$ sein.

272) *E. Landau,* a. a. O. 253).

273) *E. Landau,* a. a. O. 78) und Handbuch, § 184—195.

274) *E. Landau,* a. a. O. 258) und 21), sowie Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie, Sitzungsber. Akad. Wien 120, Abt. 2a (1911), p. 973—988.

275) *A. Axer,* Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$, Prace Mat. Fiz. 21 (1910), p. 65—95.

alle in dem Sinne äquivalent sind, daß aus irgendeiner von ihnen die drei übrigen *elementar* folgen. [Nach den Ergebnissen von Nr. **23** können natürlich auch die (89) entsprechenden Formeln mit $\Pi(x)$, $\pi(x)$ und $\vartheta(x)$ hinzugesetzt werden.] In (90) und (92) ist nur die *Konvergenz* der betreffenden Reihe wesentlich, ist diese einmal festgestellt, so folgt die Wertbestimmung aus einfachen Stetigkeitsbetrachtungen. — Etwas tiefer liegt der Satz

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1,$$

der mit einer schärferen Form von (92), nämlich mit

$$\sum_1^x \frac{\mu(n)}{n} = o\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

äquivalent ist.[276]) — Der Übergang (durch partielle Summation) von (90) zu (89), bzw. von (92) zu (91), ist trivial; die anderen Übergänge folgen aus gewissen allgemeinen Grenzwertsätzen. *Landau*[277]) gibt einen Satz, aus dem alle jene Übergänge durch Spezialisierung folgen. *Hardy* und *Littlewood*[278]) zeigen, daß die Übergänge auch mit Hilfe von „*Tauber*schen" Sätzen (vgl. Nr. **5**) über die „*Lambert*schen Reihen"

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{e^{ns}-1}$$

ausgeführt werden können.

34. Teilerprobleme. Die Funktionen $d(n)$ und $\sigma(n)$, die Anzahl und die Summe der Teiler von n, sind vielfach untersucht worden. Über die Größenordnung dieser Funktionen ist zunächst trivial, daß immer

$$d(n) \geqq 2, \quad \sigma(n) \geqq n+1$$

ist, sowie daß in beiden Beziehungen unendlich oft (nämlich für alle Primzahlen) das Gleichheitszeichen gilt. Andererseits beweisen *Wigert*[279]) und *Gronwall*[280])

---

276) *A. Axer,* Über einige Grenzwertsätze, Sitzungsber. Akad. Wien 120, Abt. 2a (1911), p. 1253—1298.

277) *E. Landau,* Über einige neuere Grenzwertsätze, Palermo Rend. 34 (1912), p. 121—131.

278) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* On a Tauberian theorem for Lambert's series and some fundamental theorems in the analytic theory of numbers, Proc. London math. Soc. (2) 19 (1919), p. 21—29.

279) *S. Wigert*, a) Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 3 (1906—1907), No. 18; b) Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Math. 37 (1914), p. 113—140.

280) *H. Gronwall,* Some asymptotic expressions in the theory of numbers, Trans. Amer. math. Soc. 14 (1913), p. 113—122.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log d(n)\cdot \log\log n}{\log n} = \log 2,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^C.$$

Gronwall gibt auch entsprechende Beziehungen für $\sigma_\alpha(n)$, die Summe der α^{ten} Potenzen der Teiler von n. *Ramanujan*[281]) beweist viele ins einzelne gehende Sätze über den Verlauf der Funktion $d(n)$. Er zeigt insbesondere, daß $d(n)$, wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, die „maximale Größenordnung"

$$2^{Li(\log n)+O(\log^\alpha n)} \qquad (\alpha < 1)$$

hat. Er nennt eine Zahl n „highly composite", wenn $d(n) > d(\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots n-1$ ist, und zeigt, wie man mit elementaren Mitteln erstaunend genaue Resultate über die Reihe der Exponenten in der Darstellung einer solchen Zahl als Produkt von Primzahlpotenzen ableiten kann. Er findet auch bemerkenswerte Beziehungen zwischen der Funktion $\sigma_\alpha(n)$ und gewissen trigonometrischen Summen; ein spezieller Fall hiervon lautet

$$\sigma(n) = \frac{\pi^2 n}{6} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(n)}{\nu^2},$$

wo $c_\nu(n) = \sum_\mu \cos\frac{2\pi\mu n}{\nu}$ ist, und μ die $\varphi(\nu)$ zu ν teilerfremden ganzen positiven Zahlen $\leqq \nu$ durchläuft.

Die summatorische Funktion $D(x)$ gibt offenbar die Anzahl der *Gitterpunkte* (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) an, die in der (u, v)-Ebene dem Gebiet

$$u > 0, \quad v > 0, \quad uv \leqq x \tag{93}$$

angehören; hieraus folgt leicht

$$D(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right] = 2\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]^2,$$

woraus die von *Dirichlet*[269]) gegebene Formel

$$D(x) = x(\log x + 2C - 1) + O(\sqrt{x})$$

---

281) *S. Ramanujan,* Highly composite numbers, Proc. London math. Soc. (2) 14 (1915), p. 347—409; On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1918), p. 259—276. Vgl. auch: On certain arithmetical functions, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1916), p. 159—184, wo gewisse, die Funktion $\sigma_\alpha(n)$ enthaltende Summen untersucht werden.

gefolgert werden kann. Dieses Resultat wurde erst von *Voronoï*[282]) verschärft; er zieht in zweckmäßig gewählten Punkten der Hyperbel $uv = x$ die Tangenten, zerlegt dadurch das Gebiet (93) in mehrere Teilgebiete, schätzt die Anzahl der Gitterpunkte in jedem Teilgebiet ab und erhält

$$(94) \qquad D(x) = x(\log x + 2C - 1) + O\left(x^{\frac{1}{3}} \log x\right).$$

Neuerdings ist es *van der Corput*[306]) gelungen, die Abschätzung des Restgliedes sogar zu $O(x^M)$ zu verbessern, wo $M < \frac{33}{100}$ ist.

Schon vor *Voronoï* hatte *Pfeiffer*[283]) einen vermeintlichen Beweis von (94) — mit $O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$ anstatt $O\left(x^{\frac{1}{3}} \log x\right)$ — veröffentlicht; seine Methode war freilich nicht einwandfrei, wurde aber von *Landau*[284]) umgearbeitet und u. a. zum Beweis von (94) benutzt. Diese „*Pfeiffer*sche Methode", auf die wir in Nr. **36** zurückkommen, beruht auf „reell-analytischer" Grundlage. Andererseits ist[285]) (vgl. Nr. **4** und **22**)

$$(95) \qquad D(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \frac{x^s}{s} (\zeta(s))^2 ds;$$

dieser für die Primzahltheorie grundlegende „komplex-analytische" Ansatz schien lange auf das Teilerproblem nicht anwendbar zu sein, es gelang jedoch *Landau*[286]) ihn zum Beweis von (94) zu benutzen. In (95) tritt die Zetafunktion nicht im Nenner auf; die Schwierigkeiten rühren daher nicht wie bei den Primzahlproblemen von den komplexen ζ-Nullstellen her, sie sind hier von ganz anderer Natur und sind hauptsächlich mit dem Aufsuchen einer oberen Grenze für das Integral

$$\int_{-\varepsilon - Ti}^{-\varepsilon + Ti} \frac{x^s}{s} (\zeta(s))^2 ds \qquad (\varepsilon > 0)$$

verbunden, wobei T eine Funktion von x ist. *Landau*[286]) zeigt, daß

282) *G. Voronoï*, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, Crelles J. 126 (1903), p. 241—282.

283) *E. Pfeiffer*, Über die Periodizität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten, Jahresber. d. Pfeifferschen Lehr- und Erzieh.-Anstalt. Jena 1886, p. 1—21.

284) *E. Landau*, Die Bedeutung der Pfeifferschen Methode für die analytische Zahlentheorie, Sitzungsb. Akad. Wien 121, Abt. 2a (1912), p. 2195—2332.

285) Für ganzzahlige x muß wie oben der Hauptwert des Integrals genommen werden.

286) *E. Landau*, a) a. a. O. 224); b) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, zweite Abhandl., Gött. Nachr. 1915, p. 209—243; c) Über Dirichlets Teilerproblem, Sitzungsb. Akad. München 1915, p. 317—328.

diese Schwierigkeit bei einer ausgedehnten Klasse von Problemen überwunden werden kann, wo an der Stelle von $(\zeta(s))^2$ eine Funktion steht, die eine Funktionalgleichung vom Typus der *Riemann*schen besitzt und gewissen anderen Bedingungen genügt. Mit dieser Methode wurde z. B. der in Nr. 29 erwähnte Satz über die Multiplikation zweier L-Reihen bewiesen, der übrigens (94) — mit der Fehlerabschätzung $O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$ — als Spezialfall enthält, da die Konvergenz von

$$(96) \qquad \sum_1^\infty \frac{d(n) - \log n - 2C}{n^s} = (\zeta(s))^2 + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{3}$ daraus folgt.[287])

Das Problem, die untere Grenze γ derjenigen α zu bestimmen, für welche
$$\Delta(x) = D(x) - x(\log x + 2C - 1) = O(x^\alpha)$$
gilt (γ ist also die Konvergenzabszisse von (96)), wird als „*Dirichlets* Teilerproblem" bezeichnet. Nach dem Obigen ist jedenfalls $\gamma < \frac{33}{100}$. Eine nicht triviale *untere* Abschätzung von γ hat *Hardy*[288]) gegeben, er beweist nämlich $\gamma \geqq \frac{1}{4}$. Er untersucht die Funktion

$$f(s) = \sum_1^\infty d(n) e^{-s\sqrt{n}} = \frac{1}{\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(2z) s^{-2z} \zeta^2(z)\, dz,$$

die in allen Punkten $s = \pm 4\pi i \sqrt{q}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ algebraische Unendlichkeitsstellen von der Ordnung $\frac{3}{2}$ aufweist, während

$$f(s) + \frac{4(\log s - 1)}{s^2}$$

für $s = 0$ regulär ist. Hieraus folgt nach *Hardy* $\gamma \geqq \frac{1}{4}$ und sogar der schärfere Satz, daß bei zweckmäßiger Wahl einer positiven Konstanten K die Ungleichungen

$$(97) \qquad \begin{cases} \Delta(x) > K x^{\frac{1}{4}} \\ \Delta(x) < -K x^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

beide beliebig große Lösungen besitzen. *Hardy* deutet auch an, wie man durch die Anwendung der von *Littlewood* (vgl. Nr. 27 und 28) für die entsprechenden Probleme der Primzahltheorie geschaffenen

287) *Landau* gibt auch einen Beweis von (94) mit einer arithmetischen Methode, deren Grundgedanke von *Piltz* herrührt: Über Dirichlets Teilerproblem, Gött. Nachr. 1920, p. 13—32. Er hat auch (94) für den Fall verallgemeinert, daß nur solche Teiler, die einer gegebenen arithmetischen Reihe angehören, mitgezählt werden; vgl. a. a. O. 224) und 284).

288) *G. H. Hardy*, On Dirichlets Divisor Problem, Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 1—25.

Methode in (97) sogar $x^{\frac{1}{4}}$ durch $(x \log x)^{\frac{1}{4}} \log\log x$ ersetzen kann. *Landau*[289]) beweist mit der vorhin erwähnten komplex-analytischen Methode einen allgemeinen Satz, der insbesondere $\gamma \geqq \frac{1}{4}$ ergibt.

Über γ ist also bis jetzt nur $\frac{1}{4} \leqq \gamma < \frac{33}{100}$ bekannt. *Im Mittel* ist aber $\Delta(x)$ von der Ordnung $x^{\frac{1}{4}}$; *Cramér*[290]) beweist nämlich (in Verschärfung früherer Resultate von *Hardy*[291]))

$$(98) \qquad \int_1^x (\Delta(t))^2\, dt = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 + O\left(x^{\frac{5}{4}+\epsilon}\right)$$

und folgert hieraus

$$(99) \qquad \frac{1}{x}\int_1^x |\Delta(t)|\, dt = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Schließlich kennt man auch eine *explizite Formel* für die Funktion $D(x)$; nach *Voronoï*[292]) gilt nämlich[293])

$$(100) \qquad D(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_1^\infty \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \left(Y_1(4\pi\sqrt{nx}) - H_1(4\pi\sqrt{nx})\right),$$

---

289) *E. Landau,* a) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, dritte Abhandl., Gött. Nachr. 1917, p. 96—101; vgl. auch: b) Über die Heckesche Funktionalgleichung, ebenda 1917, p. 102—111.

290) *H. Cramér,* Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 201—210.

291) *G. H. Hardy,* The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 192—213; Additional note on two problems in the analytic theory of numbers, ebenda (2) 18 (1918), p. 201—204.

292) *G. Voronoï,* Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries, Ann. Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 207—268, 459—534.

293) In der folgenden Nummer machen wir über Formeln dieser Art einige allgemeine Bemerkungen. Eine Formel, die im wesentlichen mit (101) übereinstimmt, wurde schon 1891 — mit ungenügendem Beweis — von *L. Lorenz* gegeben: Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd. (6) 5 (1889—1891), p. 427—450. Er entwickelt diese und sogar die entsprechenden Formeln für das *Piltz*sche Teilerproblem (s. u.) nach einer Methode, die im Grunde mit der — unstreng angewandten — *Pfeiffer*schen Methode identisch ist. Später wurde (100) von *Hardy* a. a. O. 288) unabhängig wiedergefunden. Einen Beweis von (100) mit der *Pfeiffer*schen Methode gab *W. Rogosinski,* Neue Anwendung der Pfeifferschen Methode bei Dirichlets Teilerproblem, Diss. Göttingen 1922. Vgl. auch *E. Landau,* Über Dirichlets Teilerproblem, zweite Mtlg., Gött. Nachr. 1922, p. 8—16 und *A. Walfisz,* a. a. O. 297).

wo $Y_1(v)$ die gewöhnliche „zweite Lösung" der *Bessel*schen Differentialgleichung bezeichnet und

$$H_1(v) = \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{te^{-vt}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \qquad (= O(e^{-v}))$$

eine *Hankel*sche Zylinderfunktion ist. Nach der bekannten asymptotischen Entwicklung von Y_1 hat man

$$(101)\qquad \overline{D}(x) = x(\log x + 2C - 1)$$
$$+\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{4} + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right),$$

wo das Glied $O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)$ eine für $x \geqq 1$ stetige Funktion ist. Die Sprünge der Funktion $\overline{D}(x)$ rühren also von der in (101) auftretenden unendlichen Reihe her, die das „kritische Glied" von $\overline{D}(x)$ darstellt. *Voronoï*[292]) gibt auch analoge Formeln für $\sum\limits_1^x d(n)(x-n)^k$, $k = 1, 2, \ldots$.[294])

Wigert[295]) untersucht die summatorischen Funktionen $S(x)$ und $\sum\limits_1^x \frac{\sigma(n)}{n}$; er beweist

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + x\Theta_1(x),$$

$$\sum_1^x \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{2}\log x + \Theta_2(x),$$

wo für $\nu = 1, 2$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Theta_\nu(x)}{\log x} \leqq \frac{1}{4}$$

aber jedenfalls *nicht*

$$\Theta_\nu(x) = o(\log\log x)$$

---

294) *S. Wigert,* Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres, Acta Math. 41 (1917), p. 197—218, und *E. Landau,* Gött. gel. Anz. 1915, p. 377—414, gaben einfachere Beweise für einen Teil der *Voronoï*schen Resultate. *Wigert* benutzt hierfür eine von ihm gefundene *asymptotische Funktionalgleichung* für die *Lambert*sche Reihe $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{e^{ns}-1} = \sum\limits_1^\infty d(n)e^{-ns}$, für welche *Landau* einen vereinfachten Beweis gibt: Über die Wigertsche asymptotische Funktionalgleichung für die Lambertsche Reihe, Arch. Math. Phys. (3) 27 (1918), p. 144—146. Vgl. auch *S. Wigert,* Sur une équation fonctionnelle et ses conséquences arithmétiques, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), Nr. 16.

295) *S. Wigert,* a. a. O. 279 b).

gilt. Für die Funktion

$$\sum_1^x \frac{\sigma(n)}{n}(x-n)^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

gibt er erstens entsprechende asymptotische Formeln, die zum Teil von *Landau*[296]) verschärft wurden, und zweitens explizite Formeln, welche unendliche Reihen mit *Bessel*schen Funktionen enthalten. *Walfisz*[297]) zeigt, daß eine solche Formel auch für den Fall $k = 0$ aufgestellt werden kann, und gibt für $S(x)$ die entsprechende Entwicklung[298])

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24} - x\sum_1^\infty \frac{\sigma(n)}{n} J_2(4\pi\sqrt{nx})$$

$$= \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\sum_1^\infty \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \tfrac{1}{4}\pi\right) + O\left(x^{\frac{2}{5}}\right),$$

wobei jedoch die unendlichen Reihen mit *Cesàro*schen Mitteln von der ersten Ordnung summiert werden müssen, da ihre Konvergenz bisher nicht bewiesen werden konnte.

Ramanujan[299]) findet die Beziehung

$$\sum_1^\infty \frac{(d(n))^2}{n^s} = \frac{(\zeta(s))^4}{\zeta(2s)}$$

und schließt daraus $\displaystyle\sum_1^x (d(n))^2 \sim \frac{1}{\pi^2}x\log^3 x.$

Piltz[300]) verallgemeinert das *Dirichlet*sche Teilerproblem, indem er für $k = 2, 3, \ldots$ die Funktion

$$D_k(x) = \sum_1^x d_k(n)$$

---

296) *E. Landau,* Gött. gel. Anz. **1915**, p. 377—414.

297) *A. Walfisz,* Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Diss. Göttingen 1922

298) Die zweite Zeile der Formel ergibt sich durch Zusammenstellung der Ergebnisse von *Walfisz* mit denjenigen von *Wigert* a. a. O. 279 b) und *Landau*, a. a. O. 296).

299) *S. Ramanujan,* Some formulae in the analytic theory of numbers, Mess. of Math. 45 (1916), p. 81—84. Vgl. auch *B. M. Wilson,* Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London math. Soc. (2) 21 (1922), p. 235—255.

300) *A. Piltz,* Über das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte einer gegebenen Anzahl Faktoren mit der Größe der Zahlen wächst, Diss. Berlin 1881. Vgl. auch *E. Landau,* Über eine idealtheoretische Funktion, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 1—21.

betrachtet, wobei
$$\sum_1^\infty \frac{d_k(n)}{n^s} = (\zeta(s))^k$$
gilt und $d_k(n)$ also die Anzahl der Zerlegungen von n in k Faktoren bezeichnet; insbesondere ist $d_2(n) = d(n)$. Er zeigte, daß — analog wie bei $k = 2$ — die Hauptglieder von $D_k(x)$ von dem Pol $s = 1$ der Funktion $\frac{x^s}{s}(\zeta(s))^k$ herrühren. Wird das dortige Residuum durch $xp_{k-1}(\log x)$ bezeichnet, wobei also p_{k-1} ein Polynom $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und wird
$$D_k(x) = xp_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$$
gesetzt, so weiß man nach *Hardy* und *Littlewood*[301]), daß
$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-2}{k}+\varepsilon}\right)$$
für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $k \geqq 4$ ist. Für $k = 3$ wurde das schärfste Resultat von *Landau*[286]) gegeben, indem er
$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right)$$
für alle $k \geqq 2$ beweist.[302]) — *Hardy*[288]) hat die durch (97) ausgedrückte Eigenschaft von $\Delta_2(x)$ für beliebige k verallgemeinert, wobei der Exponent $\frac{1}{4}$ durch $\frac{k-1}{2k}$ zu ersetzen ist. Die expliziten Formeln (100) und (101) wurden von *Walfisz*[297]) und *Cramér*[303]) verallgemeinert; das „kritische Glied" von (101) wird durch
$$\frac{x^{\frac{k-1}{2k}}}{\pi\sqrt{k}} \sum_1^\infty \frac{d_k(n)}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \cos\left(2k\pi\sqrt[k]{nx} + \frac{k-3}{4}\pi\right)$$
ersetzt, wo von der unendlichen Reihe nur bekannt ist, daß sie durch *Cesàro*sche Mittel von der Ordnung $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ summierbar ist. Der Fall $k = 2$ ist somit der einzige, wo die Konvergenz der auftretenden Reihen festgestellt ist.

---

301) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, a. a. O. 129).

302) *Landau*, a. a. O. 224), bemerkt, daß aus der *Riemann*schen Vermutung $\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$ folgen würde. Die Behauptung $\frac{1}{x}\int_1^x |\Delta_k(t)|\,dt = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für $k = 2, 3, \ldots$ ist nach *Hardy* und *Littlewood*, a. a. O. 301), der „*Lindelöf*schen Vermutung" $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^\varepsilon)$ äquivalent.

303) *H. Cramér*, Über das Teilerproblem von Piltz, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 21.

35. Ellipsoidprobleme. Wenn $r(n)$ für $n \geqq 0$ die Anzahl der additiven Zerlegungen von n in zwei Quadrate bedeutet, gibt die summatorische Funktion $R(x) = \sum_0^x r(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) an, die der Kreisfläche $u^2 + v^2 \leqq x$ angehören. *Gauß*[304]) bewies durch eine einfache geometrische Überlegung

$$R(x) = \pi x + O(\sqrt{x});$$

der Flächeninhalt des Kreises stellt somit einen Annäherungswert für $R(x)$ dar. Die folgenden Hauptsätze über $R(x)$ entsprechen genau denjenigen über $D(x)$ und werden auch durch analoge Methoden bewiesen:

1. Nach *Sierpiński*[305]), der die *Voronoï*sche[282]) Methode benutzte, gilt

$$R(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right); \tag{102}$$

diese Abschätzung wurde neuerdings von *van der Corput*[306]) zu $O(x^M)$ mit $M < \frac{1}{3}$ verschärft.

2. Nach *Hardy*[307]) und *Landau*[308]) kann das Restglied für kein $h < \frac{1}{4}$ von der Form $O(x^h)$ sein.

3. *Im Mittel* ist das Restglied von der Größenordnung $x^{\frac{1}{4}}$; für die Funktion $R(x) - \pi x$ gelten nämlich Formeln, die zu (98) und (99) analog sind.

4. Die explizite Formel für $\bar{R}(x) = \frac{1}{2}(R(x+0) + R(x-0))$

304) *C. F. Gauss,* De nexu inter multitudinem classium etc., Werke 2 (1863), p. 269—291.

305) *W. Sierpiński,* O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych, Prace Mat.-Fiz. 17 (1906), p. 77—118. Vgl. auch *E. Landau,* a. a. O. 224), 286b), 284), Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, Ann. Mat. pura ed appl. (3) 20 (1913), p. 1—28; Über einen Satz des Herrn Sierpiński, Giorn. di Mat. di Battaglini 51 (1913), p. 73—81; Über die Gitterpunkte in einem Kreise, erste Mtlg., Gött. Nachr. 1915, p. 148—160; Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 319—320; *S. Wigert,* Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 310—318.

306) *J. G. van der Corput,* a) Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, Math. Ann. 87 (1922), p. 39—65; b) Sur quelques approximations nouvelles, Paris C. R. 175 (1922), p. 856—859.

307) *G. H. Hardy,* On the expression of a number as the sum of two squares, Quart. J. 46 (1915), p. 263—283.

308) *E. Landau,* Über die Gitterpunkte in einem Kreise, zweite Mtlg., Gött. Nachr. 1915, p. 161—171; Neue Untersuchungen über die *Pfeiffer*sche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktanzahlen, Sitzungsb. Akad. Wien 124, Abt. 2a (1915), p. 469—505.

lautet[309]) nach *Hardy*[307])

$$(103)\qquad \begin{aligned} \bar{R}(x) &= \pi x + \sqrt{x}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{nx}) \\ &= \pi x + \frac{x^{\frac14}}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^{\frac34}} \sin\left(2\pi\sqrt{nx} - \tfrac14\pi\right) + O\left(x^{-\frac14}\right) \end{aligned}$$

Für $n \geqq 1$ ist bekanntlich $r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$, (vgl. I C 2, c), wo $d_\nu(n)$ die Anzahl der Divisoren von n von der Form $4k + \nu$ bedeutet[310]); hieraus folgt für $\sigma > 1$

$$\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^s} = 4\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = 4\zeta(s)\,L(s),$$

wenn $\chi(n)$ der Nicht-Hauptcharakter modulo 4 ist. Der Satz von *Landau* (vgl. Nr. 29) ergibt die Konvergenz von

$$\sum_1^\infty \frac{r(n) - \pi}{n^s} = 4\zeta(s)\,L(s) - \pi\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac13$; nach *van der Corput*[306]) ist diese Reihe sogar über $\sigma = \frac13$ hinaus konvergent, für $\sigma < \frac14$ ist sie aber jedenfalls divergent.

Das obige „Problem der Gitterpunkte in einem Kreise" ist als Spezialfall in dem Problem enthalten, die Anzahl der Gitterpunkte in dem k-dimensionalen ($k \geqq 2$) Ellipsoid

$$F(u_1, u_2, \ldots u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \leqq x \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

abzuschätzen, wenn F eine positiv-definite quadratische Form ist. Diese Anzahl ist nach *Landau*[311]) gleich

---

309) Einen Beweis dieser Formel mit der *Pfeiffer*schen Methode gab *E. Landau,* Über die Gitterpunkte in einem Kreise, dritte Mtlg., Gött. Nachr. 1920, p. 109—134. Vgl. auch *G. Voronoï,* Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$ où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers, Verhandl. des dritten intern. Math.-Kongr. Heidelberg 1904, p. 241—245.

310) Hieraus folgt insbesondere $r(n) < 4d(n)$ und somit nach der vorigen Nummer eine obere Abschätzung für $r(n)$.

311) *E. Landau,* a. a. O. 224), 286 b), Zur analytischen Zahlentheorie der quadratischen Formen, (über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid) Sitzungsb. Akad. Berlin 1915, p. 458—476; Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsb. Akad. Wien, 124 Abt. 2a (1915), p. 445—468. Vgl. auch *J. G. van der Corput,* Over definiete kwadratische vormen, Nieuw Arch. voor Wisk. 13 (1919), p. 125—140. — Bei diesen Untersuchungen wird teils die *Pfeiffer*sche Methode benutzt, teils analytische Methoden, wobei die verallgemeinerten Zetafunktionen von *Epstein* (vgl. Nr. 21) zur Anwendung gelangen.

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\,x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}}\right),$$

wo Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Insbesondere ergibt sich für die dreidimensionale Kugel $u^2 + v^2 + w^2 \leqq x$ als Anzahl der Gitterpunkte

$$\tfrac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right),$$

was schon von *Cauer*[312]) gefunden war. *Landau*[311]) verallgemeinert seine Sätze nach verschiedenen Richtungen und gibt auch[313]) Verallgemeinerungen der Eigenschaft 2. von $R(x)$. Die *Hardy*sche Formel (103) wird von *Walfisz*[297]) für ein k-dimensionales Ellipsoid (mit ganzen $a_{\mu\nu}$) verallgemeinert[314]); für $k > 2$ kann hierbei nur Summabilität, nicht Konvergenz der auftretenden Reihen bewiesen werden.

Die „expliziten Formeln", die in dieser und der vorhergehenden Nummer erwähnt sind, besitzen alle Eigenschaften, die denjenigen der *Riemann*schen Primzahlformel (vgl. Nr. 28) entsprechen. Da die auftretenden Reihen unstetige Funktionen darstellen, können sie jedenfalls nicht für alle x gleichmäßig konvergieren (bzw. summierbar sein); in jedem Intervall, das von Unstetigkeitspunkten frei ist, sind sie zwar gleichmäßig konvergent (bzw. summierbar), in keinem Falle jedoch unbedingt konvergent. In einigen Fällen ist es gelungen, derartige Formeln mit der „*Pfeiffer*schen Methode" zu beweisen[315]); im allgemeinen war es jedoch notwendig, die komplexe Funktionentheorie zu benutzen. Durch formale gliedweise Integration[316]) erhält man zunächst Formeln, die unbedingt konvergente Reihen enthalten und deshalb leicht bewiesen werden können. Es gilt z. B.[317])

$$(104)\qquad \int\limits_0^x \bar{R}(t)\,dt = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{x}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{r(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{nx});$$

312) *D. Cauer,* Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Diss. Göttingen 1914.

313) *E. Landau,* a. a. O. 289) und 308).

314) *Hardy* hatte schon früher die Formel für eine Ellipse aufgestellt (a. a. O. 307)); vgl. auch *G. Voronoï* a. a. O. 309).

315) Vgl. 293) und 309).

316) Die in jedem Falle hinreichend oft auszuführen ist.

317) *E. Landau,* Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 319—320.

die Zulässigkeit der gliedweisen Differentiation, die auf (103) führt, folgt nun aus dem Konvergenzsatz von *M. Riesz* (vgl. Nr. **5**), der hier auf die *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} e^{-s\sqrt{n}}$ anzuwenden ist. Die zahlentheoretischen Funktionen erscheinen hierbei gewissermaßen als Randwerte von analytischen Funktionen. *Steffensen*[171]) entwickelt eine ganz verschiedene Auffassungsweise; wenn eine zahlentheoretische Funktion $f(n)$ gegeben ist, interpoliert er nämlich die Folge $f(1)$, $f(2), \ldots$ durch eine ganze Funktion $f(z)$. Es sei z. B. $\varphi(s) = \sum f(n) n^{-s}$ für $\sigma \geqq 2$ unbedingt konvergent; dann definiert

$$f(z) = -\frac{\sin 2\pi z}{2\pi} \sum_{1}^{\infty} \varphi(n+1) z^n$$

für $z < 1$ eine ganze Funktion der gewünschten Art. *Steffensen* gibt verschiedene in der ganzen Ebene geltenden Darstellungen der Interpolationsfunktionen und wendet sie zur asymptotischen Untersuchung der zahlentheoretischen Funktionen an (vgl. Nr. **26**).

Aus (104) ergibt sich leicht ein Beweis von (102), indem man $\int_{x}^{x+h} \overline{R}(t)\, dt$ bildet und dabei $h = x^{\frac{1}{3}}$ nimmt.[317]) Diese Differenzenbildung stellt einen sehr allgemein verwendbaren Kunstgriff dar.

36. Allgemeinere Gitterpunktprobleme. In den beiden vorhergehenden Nummern wurden verschiedene Spezialfälle der folgenden Aufgabe behandelt: Ein Gebiet G in der (u, v)-Ebene ist gegeben; man soll die Anzahl der in G oder auf der Begrenzung liegenden Gitterpunkte bestimmen. In allen jenen Spezialfällen konnte eine Annäherung an die gesuchte Anzahl sowie eine grobe Abschätzung des Fehlers durch triviale Mittel erhalten werden, und diese Abschätzung konnte durch neuere Methoden verschärft werden; die Aufgabe, die beste mögliche Abschätzung zu finden, war aber noch nicht gelöst. — Es gelingt nun, entsprechende Resultate auch bei viel allgemeineren Gebieten zu erhalten, und zwar gibt es hierfür mehrere verschiedene Methoden.

Die erste Methode, die auf solche allgemeinere Gebiete angewandt wurde, war die sog. *Pfeiffer*sche, die von *Landau* (vgl. Nr. **34**) streng gemacht wurde. Wenn kein Gitterpunkt auf dem Rande von G liegt, und wenn außerdem gewisse Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Randes gemacht werden, so kann die gesuchte Gitterpunktanzahl, wie *Landau* zeigt, durch

$$\lim_{m \to \infty} \iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv$$

ausgedrückt werden, wo

$$\varphi_m(u) = \sum_{-m}^{m} \cos 2 n \pi u$$

gesetzt ist. *Landau*[318]), *Cauer*[319]) und *Hammerstein*[320]) benutzten diesen Ansatz, um bei verschiedenen speziellen Gebieten, von denen die wichtigsten in den vorhergehenden Nummern erwähnt wurden, die Gitterpunktanzahl abzuschätzen. *Van der Corput*[321]) faßt alle diese Ergebnisse in einem allgemeinen Satz zusammen, bei dem über den Rand von G nur sehr allgemeine Voraussetzungen gemacht werden. Er beweist diesen Satz auch mit der geometrischen *Voronoï*schen Methode (vgl. Nr. **34**). *Landau* und *van der Corput*[322]) geben verschiedene analoge Sätze und Vereinfachungen der Beweise, wobei u. a. die arithmetische „*Piltz*sche Methode"[287]) zum Beweis von allgemeinen Gitterpunktsabschätzungen benutzt wird.

37. Verteilung von Zahlen, deren Primfaktoren vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Es sei

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\nu^{\alpha_\nu} \tag{105}$$

die Darstellung von n als Produkt von Primzahlpotenzen. Die α sollen stets positiv und die p alle verschieden sein; p_μ soll *nicht* notwendig die μ^{te} Primzahl bezeichnen. Es liegt nahe, nach der Verteilung derjenigen Zahlen n zu fragen, deren Exponenten $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ gegebenen Bedingungen genügen. Soll z. B. stets $\nu = 1$, $\alpha_1 = 1$ sein, so deckt sich diese Aufgabe offenbar mit derjenigen, die Verteilung der Primzahlen zu untersuchen. Als Verallgemeinerung hiervon kann das Problem aufgefaßt werden, die Verteilung der h Primfaktoren enthaltenden Zahlen zu bestimmen. Dies kann wiederum auf drei verschiedene Weisen aufgefaßt werden, die zu den folgenden Bedingungen führen:

318) *E. Landau,* a. a. O. 284), 293), 305), 308), 309).

319) *D. Cauer,* a. a. O. 312) und Über die Pfeiffersche Methode, Math. Abhandl., H. A. Schwarz zu seinem fünfzigjähr. Doktorjubiläum gewidmet, Berlin 1914, p 432—447.

320) *A. Hammerstein,* a. a. O. 200).

321) *J. G. van der Corput,* Over roosterpunten in het platte vlak (De beteekenis van de methoden van Voronoï en Pfeiffer), Diss. Leiden 1919; Über Gitterpunkte in der Ebene, Math. Ann. 81 (1920), p. 1—20.

322) *E. Landau* und *J. G. van der Corput,* Über Gitterpunkte in ebenen Bereichen, Gött. Nachr. 1920, p. 135—171; *J. G. van der Corput,* Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 105—120: Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Ann. 84 (1921), p. 53—79.

$$1)\quad \nu = h,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_h = 1,$$
$$2)\quad \nu = h,$$
$$3)\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_\nu = h.$$

Landau[323]) zeigt, daß die Anzahl der diesen Bedingungen genügenden Zahlen unterhalb x in jedem der drei Fälle asymptotisch gleich

$$\frac{1}{(h-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{h-1}}{\log x}$$

ist; für den Fall 1. war dies schon von *Gauß*[324]) vermutet worden. *Landau* gibt auch genauere Ausdrücke für jene Anzahlen. *Van der Corput*[325]) untersucht verschiedene allgemeinere Probleme dieser Art.

Läßt man ν unbestimmt, schreibt aber $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 1$ vor, so bekommt man die sog. quadratfreien Zahlen. Bedeutet $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$, so beweist man leicht[326])

$$Q(x) \sim \frac{6}{\pi^2} x.$$

Für $\sigma > 1$ gilt offenbar (wenn auch 1 als quadratfreie Zahl mitgerechnet wird)

$$\sum_1^\infty \frac{Q(n) - Q(n-1)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^{2s}},$$

und die aus der Primzahltheorie geläufigen Methoden geben hier[327])

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O\left(\sqrt{x}\, e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

mit konstantem α. Wenn unter den $Q(x)$ quadratfreien Zahlen $\leqq x$ $Q_1(x)$ aus einer ungeraden, $Q_2(x)$ aus einer geraden Anzahl von Primfaktoren besteht, so folgt aus (86)

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = 1 + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right).$$

Hardy und *Ramanujan*[328]) lassen in (105) p_μ die μ^{te} Primzahl be-

---

323) *E. Landau,* Über die Verteilung der Zahlen, welche aus ν Primfaktoren zusammengesetzt sind, Gött. Nachr. 1911, p. 362—381; vgl. auch a. a. O. 238).

324) Vgl. *F. Klein,* Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken, neunter Bericht, Gött. Nachr. 1911, Geschäftl. Mitt., p. 26—32.

325) *J. G. van der Corput,* On an arithmetical function connected with the decomposition of the positive integers into prime factors, Proceed. Akad. Amsterdam 19 (1916), p. 826—855.

326) *L. Gegenbauer,* Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Denkschriften Akad. Wien, 49 : 1 (1885), p. 37—80. Es werden hier auch analoge Beziehungen für „h^{te} potenzfreie Zahlen" bewiesen.

327) *A. Axer,* a. a. O. 276).

328) *G. H. Hardy* und *S. Ramanujan*, Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London math. Soc. (2) 16 (1917),

zeichnen und führen die Bedingung $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots$ ein. Für die Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, die dieser Bedingung genügen, wird

$$\log A(x) \sim 2\pi \sqrt{\frac{\log x}{3 \log \log x}}$$

bewiesen.

Werden λ verschiedene zu k teilerfremde Restklassen mod. k gegeben, und wird vorgeschrieben, daß in (105) jedes p_μ einer von diesen Restklassen angehören muß, so ist nach *Landau*[329]) die Anzahl der $n \leqq x$ asymptotisch gleich

$$a x (\log x)^{\frac{\lambda}{\varphi(k)} - 1}, \quad (a > 0).$$

Die Summe $\sum 2^\nu$, über dieselben $n \leqq x$ erstreckt, ist dagegen asymptotisch gleich

$$b x (\log x)^{\frac{2\lambda}{\varphi(k)} - 1}, \quad (b > 0),$$

was schon *Lehmer*[330]) in einem speziellen Fall bewiesen hatte. Ein ähnlicher Satz von *Landau*[329]) enthält insbesondere das Resultat[331]): es gibt unterhalb x asymptotisch

$$c \frac{x}{\sqrt{\log x}}, \quad (c > 0),$$

ganze Zahlen, die als Summen von zwei Quadraten darstellbar sind. Hieraus folgt, wenn $B_\mu(x)$ die Anzahl der ganzen Zahlen $\leqq x$ bezeichnet, zu deren additiven Darstellung *genau* μ Quadrate erforderlich sind (bekanntlich ist $B_\mu(x) = 0$ für $\mu > 4$):

$$B_1(x) \sim \sqrt{x}, \quad B_2(x) \sim c \frac{x}{\sqrt{\log x}}, \quad B_3(x) \sim \frac{5}{6} x, \quad B_4(x) \sim \frac{1}{6} x.$$

38. Neuere Methoden der additiven Zahlentheorie. Als der Abschnitt über additive Zahlentheorie in I C 3 geschrieben wurde, war vor allem das große „*Waring*sche Problem" noch ungelöst. *Waring*[332]) vermutete 1782, daß jede ganze Zahl $n \geqq 0$ als Summe

p. 112—132. In der Abhandlung: The normal number of prime factors of n, Quart. J. 48 (1917), p. 76—92, beschäftigen sich die beiden Verfasser mit Problemen, die zu den in dieser Nummer behandelten Fragestellungen in einer gewissen Beziehung stehen.

329) *E. Landau*, a. a. O. 78); Bemerkungen zu Herrn D. N. Lehmers Abhandlung in Bd. 22 dieses Journals, Amer. J. of math. 26 (1904), p. 209—222; Lösung des Lehmerschen Problems, ebenda 31 (1909), p. 86—102.

330) *D. N. Lehmer*, Asymptotic Evaluation of certain Totient Sums, Amer. J. of math. 22 (1900), p. 293—335.

331) *E. Landau*, Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate, Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 305—312.

332) *E. Waring*, Meditationes Algebraicae, 3. Aufl. Cambridge 1782, p. 349—350.

einer festen (d. h. nur von k, nicht von n, abhängenden) Anzahl von positiven k^{ten} Potenzen dargestellt werden konnte, und zwar für $k = 1, 2, \ldots$. Bis 1909 war dies nur für einige spezielle Werte von k bewiesen; es gelang aber *Hilbert*[333]) einen allgemeinen Beweis zu finden. Dieser Beweis benutzt zwar die Hilfsmittel der Integralrechnung; durch spätere Vereinfachungen[334]) ist aber gezeigt worden, daß dies gänzlich vermieden werden kann, so daß die Methode im Grunde eine rein algebraische ist und deshalb hier nicht eingehender besprochen werden soll.

Rein analytisch ist dagegen die Methode, welche neuerdings von *Hardy* und *Littlewood*[335]) auf das Problem angewandt worden ist. Es sei $k > 2$, und es werde für $|x| < 1$

333) *D. Hilbert*, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches Problem), Gött. Nachr. 1909, p. 17—36 und Math. Ann. 67 (1909), p. 281—300.

334) Vgl. z. B. *F. Hausdorff*, Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems, Math. Ann. 67 (1909), p. 301—305; *E. Stridsberg,* Sur la démonstration de M. Hilbert du théorème de Waring, Math. Ann. 72 (1912), p. 145—152; Några elementära undersökningar rörande fakulteter och deras aritmetiska egenskaper, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 11 (1917), No. 25; *R. Remak,* Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems, Math. Ann. 72 (1912), p. 153—156. Für die ältere Literatur zum *Waring*schen Problem vgl. die Göttinger Dissertationen von *A. J. Kempner*, Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen, 1912, und *W. S. Baer*, Beiträge zum Waringschen Problem, 1913.

335) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, A new solution of Waring's problem, Quart. J. 48 (1919), p. 272—293; Some problems of Partitio numerorum, I: A new solution of Waring's problem, Gött. Nachr. 1920, p. 33—54, II: Proof that any large number is the sum of at most 21 biquadrates, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 14—27, (III: a. a. O. 250)), IV: The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 161—188; *G. H. Hardy,* Some famous problems of the Theory of Numbers, and in particular Waring's problem, Inaugural lecture, Oxford 1920. Vgl. auch *E. Landau,* a) Zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Gött. Nachr. 1921, p. 88—92; b) Zum Waringschen Problem, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 219—247; c) Über die Hardy-Littlewoodschen Arbeiten zur additiven Zahlentheorie, Jahresb. d. deutschen Math.-Ver. 30 (1921), p. 179—185; *H. Weyl*, Bemerkungen über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem, Gött. Nachr. 1921, p. 189—192; *A. Ostrowski*, Bemerkungen zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 28—34. *E. Landau* (b.) berücksichtigt auch gewisse Verallgemeinerungen, die zuerst von *Kamke* mit der *Hilbert*schen Methode behandelt wurden: Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes, Math. Ann. 83 (1921), p. 85—112. — Die im Texte gewählte Bezeichnungsweise weicht etwas von der *Hardy-Littlewood*schen ab und schließt sich an *Landau* (b.) an.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^k}, \quad f^s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) x^n$$

gesetzt, wo also $r(n)$ von s und k abhängt. Um die *Waring*sche Vermutung, $r(n) > 0$ für $s > s_0 = s_0(k)$, zu beweisen, setzen *Hardy* und *Littlewood*

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x = 1 - \frac{1}{n}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}}\, dx.$$

Bei dem Versuch, aus dieser Integraldarstellung ein asymptotisches Ergebnis über $r(n)$ zu gewinnen, stößt man auf ungeheure Schwierigkeiten, da die Funktion unter dem Integralzeichen nicht über den Einheitskreis fortgesetzt werden kann. *Hardy* und *Littlewood* bemerken nun, daß die Einheitswurzeln $\varrho = e^{\frac{2p\pi i}{q}}$ gewissermaßen die „schwersten" Singularitäten von $f(x)$ sind; bei radialer Annäherung an den Punkt $x = \varrho$ wird $f^s(x)$ asymptotisch gleich einer Hilfsfunktion, die durch eine Potenzreihe von der einfachen Form[336] $\sum \nu^\alpha \left(\frac{x}{\varrho}\right)^\nu$, mit einer Konstanten multipliziert, dargestellt wird. Der Hauptgedanke der Methode ist nun, $f^s(x)$ durch eine Summe solcher Hilfsfunktionen, d. h. $r(n)$ durch die entsprechende Summe der Koeffizienten von x^n, zu approximieren. Die Durchführung dieses Ansatzes gelingt natürlich nur durch ziemlich verwickelte Überlegungen, wobei die Untersuchungen von *Weyl*[114]) über Diophantische Approximationen eine wichtige Rolle spielen. Das folgende Hauptresultat wird erhalten: Für alle $s \geqq s_0(k)$ ist bei unendlich wachsendem n

$$r(n) \sim \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} n^{\frac{s}{k} - 1} S, \tag{106}$$

wo S die sog. „singuläre Reihe"

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ (p,q)=1}}^{q-1} \left(\frac{S_{pq}}{q}\right)^s e^{-\frac{2\pi i n p}{q}},$$

mit

$$S_{pq} = \sum_{h=1}^{q} e^{\frac{2\pi i h^k p}{q}}$$

bezeichnet. Die Reihe S ist für $s \geqq s_0(k)$ konvergent und $> \sigma$, wo $\sigma = \sigma(k, s)$ nicht von n abhängt. Für s_0 ist insbesondere die Zahl $s_0 = (k-2)2^{k-1} + 5$ wählbar.

---

336) *Landau*, a. a. O. 335b), zeigt, daß man sogar eine noch einfachere, durch eine Binomialreihe dargestellte Hilfsfunktion benutzen kann.

Die *Hardy-Littlewood*sche Methode ergibt also wesentlich mehr als die *Hilbert*sche, welche nur einen Existenzsatz lieferte. Insbesondere folgt, daß es zu jedem k eine *kleinste* Zahl $G(k)$ gibt, so daß alle *hinreichend großen* n als Summen von höchstens je $G(k)$ k^{ten} Potenzen darstellbar sind, und daß $G(k) \leqq (k-2)2^{k-1} + 5$ ist. Jede hinreichend große Zahl ist also die Summe von höchstens 21 Biquadraten; für den Fall $k = 3$ liefert der Satz aber nur $G(k) \leqq 9$, während schon früher durch *Landau*[337]) bekannt war, daß jede hinreichend große Zahl die Summe von höchstens 8 Kuben ist. Andererseits ist bekannt[338]), daß immer $G(k) \geqq k + 1$, und im Falle $k = 2^m$ sogar $G(k) \geqq 4k$ ist.

Im Falle $k = 2$ wird die erzeugende Funktion $f(x)$ durch eine Thetareihe ausgedrückt:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} x^{n^2} - 1\right),$$

und die Transformationstheorie der Thetafunktionen gestattet nun, viel genauere Resultate als im allgemeinen Falle zu erhalten.[339]) Die asymptotische Gleichung (106) bleibt auch hier für $s \geqq 4$ richtig; es kann sogar für $3 \leqq s \leqq 8$ in (106) das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzt werden. Im Falle $s = 3$ ist $S = 0$ für unendlich viele n (nämlich für $n = 4^a(8b + 7)$). Durch Umformung der so erhaltenen Ausdrücke erhält man neue Beweise der klassischen Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von Quadraten. Besonders wichtig für diese Untersuchungen waren einige neuere Arbeiten von *Mordell*[340]), der die Darstellung von Zahlen durch Quadratsummen mit Hilfe der Theorie der Modulfunktionen systematisch untersuchte.

337) *E. Landau,* Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie, Math. Ann. 66 (1909), p. 102—105. Bei dem Beweis wird ein Satz über Primzahlen in arithmetischen Reihen benutzt. Nach *Wieferich* ist *jede* Zahl die Summe von höchstens 9 Kuben; es gibt auch tatsächlich Zahlen (23, 239), die 9 Kuben erfordern: Math. Ann. 66 (1909), p. 95—101.

338) Außerdem kennt man z. B. $G(6) \geqq 9$. Eine Zusammenstellung der bekannten Resultate geben *Hardy* und *Littlewood*, Partitio numerorum IV (a. a. O. 335). Auf die Funktion $g(k)$, die man erhält, wenn man in der Definition von $G(k)$ die Wörter „hinreichend große" ausläßt, gehen wir hier nicht ein; es sei nur bemerkt, daß aus der Existenz von $G(k)$ unmittelbar die Existenz von $g(k)$ folgt.

339) *G. H. Hardy,* On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five, Trans. Amer. math. Soc. 21 (1920), p. 255—284. Vgl. hierzu *S. Ramanujan,* On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1919), p. 259—276.

340) *L. J. Mordell,* On the representations of numbers as a sum of $2r$

Über die Anwendung der Methode auf den „*Goldbach*schen Satz" und verwandte Primzahlprobleme wurde schon in Nr. **31** berichtet. — Zum ersten Male wurde die Methode nicht auf *Warings* Satz angewendet, sondern auf das Problem der Abschätzung der Funktion $p(n)$, welche die Anzahl der „unbeschränkten Partitionen" von n, d. h. die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von

$$n = x + 2y + 3z + 4u + \cdots,$$

angibt. Als erzeugende Funktion tritt hier

$$f(x) = 1 + \sum_1^\infty p(n) x^n = \prod_1^\infty \frac{1}{1 - x^n}$$

auf. *Hardy* und *Ramanujan*[341]) beweisen über $p(n)$ sehr genaue asymptotische Sätze, aus denen insbesondere

$$(107) \qquad p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{6n}}$$

folgt. Der Hauptgedanke ist wieder derselbe: die nicht fortsetzbare Funktion $f(x)$ wird durch eine Summe fortsetzbarer Funktionen approximiert, die in je einer Einheitswurzel singulär sind. Die rechte Seite in (107) rührt übrigens von der „schwersten" Singularität $x = 1$ her.

39. Diophantische Approximationen. Durch die in den Nummern **7** und **17** besprochenen Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen wurde ein lebhaftes Interesse für diese Theorie erweckt. Jene Anwendungen gingen von dem grundlegenden *Kronecker*schen[342]) Satze aus, der in moderner Ausdrucksweise so lautet: Es seien $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ *linear unabhängige* Zahlen, und es sei

$$(x) = x - [x]$$

gesetzt; dann liegen die Punkte mit den Koordinaten

$$(108) \qquad x_1 = (n\alpha_1),\ x_2 = (n\alpha_2),\ \ldots\ x_k = (n\alpha_k), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

im k-dimensionalen Einheitswürfel überall dicht. *Weyl*[114]) gibt eine

---

squares, Quart. J. 48 (1917), p. 93—104; On the representations of numbers as the sum of an odd number of squares, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1919), p. 361—372.

341) *G. H. Hardy* und *S. Ramanujan*, Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n, Paris C. R. 164 (1917), p. 35—38; Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London math. Soc. (2) 17 (1918), p. 75—115.

342) *L. Kronecker*, Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variabeln, Sitzungsb. Akad. Berlin 1884, p. 31—46, Werke 3 : 1, p. 1071—1080; Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, Sitzungsb. Akad. Berlin 1884, p. 1179—1193, Werke 3 : 1, p. 47—110.

für die genannten Anwendungen wesentliche Vertiefung dieses Satzes, indem er zeigt, daß jene Punkte sogar in jedem Teile des Einheitswürfels *asymptotisch gleich dicht* liegen. Die Anzahl derjenigen unter den N ersten Punkten (108), die einem Teilgebiet vom Inhalt δ angehören, ist also asymptotisch gleich δN. *Weyl* beweist dies durch systematische Benutzung der „analytischen Invariante der Zahlklassen mod. 1“, der Funktion $e^{2\pi i z}$.

Hardy-Littlewood[343]) und *Weyl*[114]) geben auch wichtige Verallgemeinerungen auf den Fall, wo in (108) n durch n^q oder durch ein Polynom ersetzt wird; die hierbei von *Weyl* eingeführten, eleganten Methoden zur Transformation und Abschätzung von Summen mit dem allgemeinen Gliede $e^{2\pi i p(n)}$ (p ein Polynom) waren für die in der vorhergehenden Nummer besprochenen Untersuchungen über *Warings* Problem von grundlegender Bedeutung und haben auch zu neuen Resultaten über die Größenordnung von $\zeta(s)$ auf vertikalen Geraden geführt (vgl. Nr. **18**). *Hardy* und *Littlewood* haben insbesondere Summen der Gestalt

$$\sum_1^n e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \alpha\pi i}, \quad \sum_1^n e^{\nu^2\alpha\pi i}, \quad \sum_1^n (-1)^{\nu-1} e^{\nu^2\alpha\pi i}$$

untersucht, die mit dem Verhalten der Thetareihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze zusammenhängen. Wenn α irrational ist, sind alle drei Summen von der Form $o(n)$. Auch über die Verteilung der Zahlen $(\lambda_n\alpha)$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine unbegrenzt und monoton wachsende Zahlfolge ist, gibt es Sätze, die den vorhergehenden entsprechen.[344]) Für $\lambda_n = a^n$ hängen diese Sätze mit der Verteilung der Ziffern in (verallgemeinerten) Dezimalbrüchen zusammen.[345])

Für die Summe $\sum(\nu\alpha)$ gilt bei irrationalem α immer

$$\sum_1^n (\nu\alpha) = \tfrac{1}{2}n + o(n).$$

Wird in dieser Formel das Restglied durch ein „besseres“ ersetzt, so

343) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Some problems of diophantine approximation, Intern. Congr. of math. Cambridge 1912, p. 223—229; Acta Math. 37 (1914), p. 155—238. Vgl. auch *J. G. van der Corput,* Über Summen, die mit den elliptischen Θ-Funktionen zusammenhängen, Math. Ann. 87 (1922), p. 66—77.

344) Vgl. hierzu auch *R. H. Fowler,* On the distribution of the set of points $(\lambda_n\Theta)$, Proc. London math. Soc. (2) 14 (1914), p. 189—206.

345) *E. Borel,* Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Palermo Rend. 27 (1909), p. 247—271 (vgl. auch Leçons sur la théorie des fonctions, deuxième éd., Paris 1914). Weitergehende Sätze geben *Hardy* und *Littlewood,* a. a. O. 343).

kann die neue Formel nicht für *alle* irrationalen α gelten; beschränkt man sich dagegen auf spezielle Klassen von Irrationalitäten, so kann die Abschätzung erheblich verschärft werden. Es gilt z. B. für ein α, bei dessen Entwicklung in einen gewöhnlichen Kettenbruch die auftretenden Nenner beschränkt sind[346])

$$\sum_1^n (\nu\alpha) = \tfrac{1}{2}n + O(\log n)$$

Ostrowski[346]) zeigt, daß bei *keinem* irrationalen α hier das O gegen o vertauscht werden kann. *Hardy* und *Littlewood*[346]) zeigen, daß das Problem der Abschätzung von $\sum(\nu\alpha)$ mit der Bestimmung der Gitterpunktanzahl in einem gewissen rechtwinkligen Dreieck nahe verbunden ist. *Hecke*[347]) hat jene Summen für quadratisch irrationale α näher untersucht. Ist insbesondere $\alpha = \sqrt{D}$, wo $4D$ eine positive Fundamentaldiskriminante ist (vgl. Nr. **40**), so konvergiert die *Dirichlet*sche Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{(n\alpha) - \frac{1}{2}}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ und stellt eine überall meromorphe Funktion dar, die in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ unendlich viele Pole besitzt.

Es sei
$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

die gewöhnliche Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl α; hinsichtlich der Größenordnung der a_n sind u. a. folgende Sätze bekannt:[348])

1. Die Menge der α, für die von einer gewissen Stelle an $a_n > 1$ gilt, hat das Maß Null.

2. Es seien $d_1, d_2, \ldots$ und $k_1, k_2, \ldots$ monoton wachsende Folgen positiver Zahlen, und es sei $\sum \frac{1}{d_n}$ divergent, $\sum \frac{1}{k_n}$ konvergent. „Fast überall" ist dann von einer gewissen Stelle an $a_n < k_n$, und „fast überall" ist $a_n > d_n$ für unendlich viele n.

346) *M. Lerch*, L'interméd. des Math. 11 (1904), p. 145; *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, Some Problems of diophantine approximation: the lattice-points of a right-angled triangle, Proc. London math. Soc. (2) 20 (1921), p. 15—36; *A. Ostrowski*, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Math. Seminar Hamburg 1 (1921), p. 77—98.

347) *E. Hecke*, Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins, Abh. Math. Seminar Hamburg 1 (1921), p. 54—76.

348) *E. Borel*, a. a. O. 345); *F. Bernstein*, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Ann. 71 (1911), p. 417—439.

Hiermit hängen die Fragen nach der Approximation irrationaler Zahlen durch rationale nahe zusammen.[349]) Zu jedem irrationalen α gibt es unendlich viele rationale $\frac{p}{q}$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

gilt. Wenn k_n die obige Bedeutung hat, so bilden diejenigen α, die sich durch unendlich viele $\frac{p}{q}$ mit der Genauigkeit

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q k_q}$$

approximieren lassen, eine Menge vom Maß Null. Wenn α eine algebraische Zahl vom Grade n ist, so gilt nach einem wichtigen Satze von *Siegel*[350]) für jedes rationale $\frac{p}{q}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\gamma}{q^2 \sqrt{n}},$$

wo γ nur von α abhängt.

V. Algebraische Zahlen und Formen.

40. Quadratische Formen und Körper.[351]) Die nach *Dirichlet* benannten Reihen wurden von ihm gebraucht, um die Anzahl der verschiedenen Klassen binärer quadratischer Formen einer gegebenen Diskriminante zu berechnen;[352]) die Lösung dieser Aufgabe setzte ihn in den Stand, seinen Satz über die Primzahlen einer arithmetischen Reihe zu beweisen (vgl. Nr. **30**). Über die Berechnung jener Klassenanzahl und ihre Beziehung zu den *Gauß*schen Summen ist in I C 3, Nr. 2, über die analogen Probleme bei Formen mit mehr als zwei Veränderlichen in I C 2, d und e, berichtet worden; es seien hier nur einige Ergänzungen für die binären Formen gegeben.

---

349) Vgl. *A. Hurwitz,* Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, Math. Ann. 39 (1891), p. 279—284; *E. Borel,* Contribution à l'analyse arithmétique du continu, J. math. pures appl. (5) 9 (1903), p. 329—375; *O. Perron,* Irrationalzahlen, Berlin und Leipzig (Ver. wiss. Verleger) 1921.

350) *C. Siegel,* Approximation algebraischer Zahlen, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 173—213.

351) Was sich unmittelbar durch Spezialisierung ($n = 2$) aus Formeln der beiden folgenden Nummern ergibt, wird hier nicht erwähnt.

352) *G. Lejeune-Dirichlet,* Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Crelles J. 19 (1839), p. 324—369 und **21** (1840), p. 1—12, 134—155, Werke 1, p. 411—496.

Die quadratische Form werde in *Kronecker*scher Bezeichnungsweise[353])

$$f(xy) = ax^2 + bxy + cy^2 = (a, b, c)$$

geschrieben, ihre Diskriminante sei

$$b^2 - 4ac = D = Q^2 D_0,$$

wo D_0 eine sog. *Fundamentaldiskriminante*[354]) ist. Es sei

$$(a_1, b_1, c_1), \ldots (a_h, b_h, c_h)$$

ein Repräsentantensystem der *primitiven* — und im Falle $D < 0$ *positiven* — zu D gehörigen Klassen; die Koeffizienten a können dabei immer positiv und die b negativ vorausgesetzt werden. Dann ist für $\sigma > 1$

$$(109) \qquad \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{x,y} (a_\nu x^2 + b_\nu xy + c_\nu y^2)^{-s} = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n}{}' \frac{1}{n^s},$$

wo links x und y alle die zugehörige quadratische Form zu Q teilerfremd machenden Paare ganzer Zahlen exkl. $(0, 0)$ durchlaufen; im Falle $D > 0$ tritt jedoch die Beschränkung

$$0 \leqq y < \frac{2 a_\nu U}{T - b_\nu U} x$$

hinzu, wo (T, U) die „Fundamentallösung" der Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$ bezeichnet (vgl. I C 2 c, 2). Rechts durchläuft n in $\sum'$ alle zu Q teilerfremden positiven ganzen Zahlen, und es ist

$$\tau = \begin{cases} 2 \text{ für } D < -4 \\ 4 \quad „ \quad D = -4 \\ 6 \quad „ \quad D = -3 \\ 1 \quad „ \quad D > 0. \end{cases}$$

Das *Kronecker*sche Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist für $n > 0$ ein reeller Charakter mod. $|D|$, und die Reihe $\sum\limits_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$ ist deshalb eine von den in Nr. 29 untersuchten L-Reihen. Jede der h Doppelsummen auf der linken Seite von (109) hat für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit einem von ν unabhängigen Residuum, und man findet durch Ver-

353) *L. Kronecker*, Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Sitzungsb. Akad. Berlin 1885, p. 770; vgl. auch die ausführliche Darstellung von *J. de Séguier*, Formes quadratiques et multiplication complexe, Berlin 1894.

354) Wenn m eine quadratfreie Zahl bedeutet, so ist *entweder* $D_0 = m$, $m \equiv 1 \pmod{4}$, *oder* $D_0 = 4m$, $m \equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$. Es wird immer $D_0 \neq 1$ vorausgesetzt, so daß D keine Quadratzahl ist.

gleichung der Residuen

$$(110)\qquad h = \begin{cases} \tau \frac{\sqrt{-D}}{2\pi} L(1) & \text{für} \quad D < 0 \\ \frac{\sqrt{D}}{\log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}} L(1) & \text{für} \quad D > 0. \end{cases}$$

Die Summierung der unendlichen Reihen gestaltet sich am einfachsten, wenn D eine Fundamentaldiskriminante und daher $Q = 1$ ist; der allgemeine Fall läßt sich hierauf zurückführen. Für diesen Fall gilt

$$(111)\qquad h = \begin{cases} \frac{\tau}{2D} \sum_{n=1}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) n & \text{für} \quad D < 0 \\ -\frac{1}{\log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}} \sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) \log \sin \frac{n\pi}{D} & \text{für} \quad D > 0. \end{cases}$$

Jede Fundamentaldiskriminante D ist die Grundzahl des durch $\sqrt{D}$ erzeugten quadratischen Zahlkörpers (vgl. I C 4a), und den Klassen quadratischer Formen der Diskriminante D entsprechen umkehrbar eindeutig die Idealklassen des Körpers $k(\sqrt{D})$.[355]) Die Anzahl der Idealklassen wird also auch durch (111) gegeben; diese Anzahl hängt nach I C 4a, Nr. 9 mit dem Residuum im Punkte $s = 1$ der zum Körper gehörigen Zetafunktion $\zeta_k(s)$ zusammen. In der Tat ist $\zeta_k(s)$ gleich der rechten Seite von (109), dividiert durch τ,

$$\zeta_k(s) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \zeta(s) = L(s)\,\zeta(s),$$

so daß $\zeta_k(s)$ mit der Theorie von $\zeta(s)$ und den L-Funktionen schon erledigt ist.

Die Ausdrücke (111) können auch nach einer weniger analytischen Methode abgeleitet werden, wobei die *Dirichlet*schen Reihen nicht auftreten.[356]) Verschiedene Transformationen von (111), sowie andere Ausdrücke für Klassenzahlen sind von *Lerch*[357]) gegeben. Er gibt

355) Hierbei sind jedoch zwei Ideale nur dann zur selben Klasse gehörig, wenn ihr Quotient eine Zahl *positiver Norm* ist. Die Anzahl der so definierten Klassen ist entweder gleich der gewöhnlichen Klassenzahl (vgl. I C 4a, Nr. 8) oder doppelt so groß.

356) Vgl. z. B. *Ch. Hermite,* Paris C. R. 55 (1862), p. 684, Oeuvres 2, p. 255.

357) *M. Lerch,* Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers, Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 33 (1906), No. 2; Paris C. R. 135 (1902), p. 1314—1315; Acta Math. 29 (1905), p. 333; 30 (1906), p. 203—293; Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental, J. math. pures appl. (5) 9 (1903), p. 377—401.

insbesondere Formeln, welche für numerische Berechnung geeignet sind, z. B.

$$h = 2 \operatorname{sgn} D_2 \cdot \sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}|D_1|} \left(\frac{D_1}{\mu}\right) \sum_{\nu=1}^{\mu\left|\frac{D_2}{D_1}\right|} \left(\frac{D_2}{\nu}\right),$$

wo D_1 und D_2 Fundamentaldiskriminanten bedeuten, $D_1 D_2 < 0$ und h die Klassenzahl für die Diskriminante $D_1 D_2$ ist.

Für beliebige Diskriminanten gilt[358])

$$h = O(\sqrt{|D|} \log |D|)$$

und für $D > 0$ sogar $\qquad h = O(\sqrt{D})$.

Es gibt unendlich viele positive Diskriminanten mit gleicher Klassenzahl[359]), für negative D ist dies dagegen wahrscheinlich nicht der Fall — in der Tat gilt[360]) für negative Fundamentaldiskriminanten, wenn über die Nullstellen der obigen Funktion $\zeta_k(s)$ eine gewisse unbewiesene Annahme (die insbesondere aus der Richtigkeit der „verallgemeinerten *Riemann*schen Vermutung“ für die L-Funktionen folgen würde) gemacht wird,

$$h > c \frac{\sqrt{|D|}}{\log |D|}.$$

Über die „mittlere Anzahl“ der Klassen gab schon *Gauß*[361]) (ohne Beweis) einige Sätze; es gilt z. B. nach *Landau*[362]), wenn h_n die Klassenanzahl primitiver positiv-definiter Formen der Diskriminante $-n$ bedeutet,

$$\sum_1^x h_n = \frac{\pi}{18\zeta(3)} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2\pi^2} x + O\left(x^{\frac{5}{6}} \log x\right).$$

Die Klassenzahl für negative Diskriminanten, insbesondere die Lehre von den sog. Klassenzahlrelationen, steht zu der Theorie der elliptischen Funktionen und deren komplexer Multiplikation in naher Beziehung[363]), darauf kann hier jedoch nicht eingegangen werden.

358) Vgl. *G. Pólya*, *J. Schur* und *E. Landau*, a. a. O. 205). *E. Landau* gibt auch analoge Resultate für beliebige algebraische Zahlkörper.

359) *G. Lejeune-Dirichlet*, Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante, Ber. Verhandl. Akad. Berlin 1855, p. 493—495; Werke 2, p. 185—187.

360) *E. Landau*, Über imaginär-quadratische Zahlkörper mit gleicher Klassenzahl; Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, p. 277—295. Vgl. auch *T. Nagel*, Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 140—150.

361) *C. F. Gauss*, Disquisitiones arithmeticae, Art. 302—304.

362) *E. Landau*, a. a. O. 284). Vgl. auch *F. Mertens*, a. a. O. 270).

363) Vgl. I C 6, Nr. **12** sowie II B 3, Nr. **75**. Eine Darstellung der Lehre

Dirichlet[364]) stellte den Satz auf, daß durch jede primitive — und im Falle $D < 0$ positive — binäre quadratische Form einer nicht-quadratischen Diskriminante unendlich viele Primzahlen dargestellt werden können. Er gab auch Andeutungen für den Beweis, der später von *Schering*[365]) und *Weber*[366]) vollständig ausgeführt wurde. *Mertens*[367]), *de la Vallée Poussin*[368]), *Bernays*[369]) und *Landau*[370]) gaben für die Anzahl der darstellbaren Primzahlen $\leq x$ und für gewisse damit zusammenhängende Summen asymptotische Ausdrücke, die als Spezialfälle in den Sätzen von *Landau*[370]) über Primideale in Idealklassen (vgl. Nr. **42**) enthalten sind. Jene Anzahl ergibt sich gleich

$$\frac{1}{h_0} Li(x) + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

mit konstantem α, wobei $h_0 = 2h$ oder $= h$ ist, je nachdem die betreffende Form einer zweiseitigen Klasse angehört oder nicht. Bei dem Beweis wird die Lehre von der Komposition der Klassen (vgl. I C 2c, 11) benutzt. Diese liefert bekanntlich eine *Abel*sche Gruppe, und indem man die Charaktere dieser Gruppe auf der linken Seite von (109) einführt, gewinnt man neue Funktionen, die den *L*-Funktionen (vgl. Nr. **29**) entsprechen. Der Beweis verläuft dann ähnlich wie bei den Primzahlen in einer arithmetischen Reihe. Die hierbei auftretenden Summen

$$\sum_{x,y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-s},$$

---

von den Klassenzahlrelationen gab neuerdings *L. J. Mordell,* On class relation formulae, Messenger of Math. 46 (1916), p. 113—135.

364) *G. Lejeune-Dirichlet,* Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen, Ber. Verhandl. Akad. Berlin 1840, p. 49—52; Werke 1, p. 497—502.

365) *E. Schering,* Beweis des Dirichletschen Satzes etc., Ges. math. Werke 2, p. 357—365.

366) *H. Weber,* Beweis des Satzes etc., Math. Ann. 20 (1882), p. 301—329; Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern, Math. Ann. 48 (1897), p. 433—473; 49 (1897), p. 83—100; 50 (1898), p. 1—26.

367) a. a. O. 270).

368) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Troisième partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20 : 2 (1896), p. 363—397; Quatrième partie, ibid. 21 : 2 (1897), p. 251—342.

369) *P. Bernays,* Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante, Diss. Göttingen 1912.

370) *E. Landau,* a) Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 63 (1907), p. 145—204; b) Über die Primzahlen in definiten quadratischen Formen und die Zetafunktion reiner kubischer Körper, Math. Abhandl., H. Schwarz . . . gewidmet, Berlin (Springer) 1914, p. 244—273.

mit verschiedenen Bedingungen für die Summationsvariablen x und y, definieren in der ganzen Ebene eindeutige Funktionen, die nur für $s = 1$ einen Pol haben.[371]) Der Beweis dieses Satzes für positive Diskriminanten, der von *de la Vallée Poussin*[368]) gefunden wurde, war sehr kompliziert und wurde später von *Landau*[372]) vereinfacht. *Dirichlet*[373]) hat auch behauptet, daß unter den durch eine quadratische Form dargestellten Primzahlen unendlich viele vorkommen, die einer gegebenen arithmetischen Reihe angehören, vorausgesetzt, daß die Form überhaupt fähig ist, Zahlen von dieser Reihe darzustellen. *Meyer*[374]) hat diesen Satz bewiesen, *de la Vallee Poussin*[375]) und *Landau*[370]) haben ihn durch Angabe asymptotischer Formeln verschärft.

Aus den neueren Untersuchungen von *Hecke*[376]) geht hervor, daß die Form $ax^2 + bxy + cy^2$, wenn D Fundamentaldiskriminante ist, auch noch dann unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn man die ganzzahligen Veränderlichen x und y auf einen beliebigen Winkelraum einschränkt.

Bernays[369]) zeigt, daß die Anzahl der ganzen Zahlen $n \leqq x$, die durch eine quadratische Form darstellbar sind, asymptotisch gleich

$$A \frac{x}{\sqrt{\log x}}$$

mit konstantem A ist (vgl. Nr. **37**, am Ende).

371) Vgl. Nr. **21**. Vgl. ferner *M. Lerch,* Základové theorie Malmsténovskych řad, Rozpravy české akad., 2. Kl., 1 (1892), Nr. **27**; Studie v oboru Malmsténovskych řad a invariantu forem kvadratickych, ibid. 2 (1893), Nr. **4**; *G. Herglotz,* Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen, Math. Ann. 61 (1905), p. 551—560.

372) *E. Landau,* Neuer Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin, Jahresb. d. deutschen Math.-Ver. 24 (1915), p. 250—278.

373) *G. Lejeune-Dirichlet,* Extrait d'une lettre etc., Paris C. R. 10 (1840), p. 285—288; J. Math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 72—74; Sur la théorie des nombres, Werke 1, p. 619—623.

374) *A. Meyer,* Über einen Satz von Dirichlet, Crelles J. 103 (1888), p. 98 bis 117. Vgl. auch *P. Bachmann,* Die analytische Zahlentheorie, Leipzig (Teubner) 1894, insbes. Abschn. 10.

375) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers; Cinquième partie, Ann. Soc. sc. Bruxelles 21: 2 (1897), p. 343 bis 368.

376) *E. Hecke,* Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 357—376; 6 (1920), p. 11—51.

41. Die Zetafunktionen von Dedekind und Hecke.[377]) *Dedekind*[378]) hat die *Riemann*sche Zetafunktion für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper k vom Grade n verallgemeinert. Er setzt[379]) (vgl. I C 4a, Nr. 9)

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s},$$

wo $\mathfrak{a}$ die Ideale, $\mathfrak{p}$ die Primideale von k durchläuft und $F(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m als Norm eines Ideals von k bedeutet. Alle drei Ausdrücke sind für $\sigma > 1$ absolut konvergent; $\zeta_k(s)$ ist demnach in dieser Halbebene regulär und $\neq 0$. Für den Körper der rationalen Zahlen ist $\zeta_k(s)$ mit $\zeta(s)$ identisch. Mit Hilfe einer *Weber*schen[380]) Verschärfung der *Dedekind*schen[378]) Abschätzung der Anzahl aller Ideale von k mit Norm $\leqq x$ zeigt *Landau*[381]), daß $\zeta_k(s)$ auch noch für $\sigma > 1 - \frac{1}{n}$ regulär ist, mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem schon von *Dedekind*[378]) angegebenen Residuum

$$\frac{2^{r_1 + r_2} \pi^{r_2} R h}{w \sqrt{d}}$$

besitzt. Hier bedeutet (vgl. I C 4a) d die Grundzahl, R den Regulator, w die Anzahl der Einheitswurzeln und h die Anzahl der Idealklassen[382]) von k. Ferner bezeichnet r_1 die Anzahl der reellen und $2r_2 = n - r_1$ die Anzahl der nicht-reellen Wurzeln der irreduziblen Gleichung, die von einer den Körper k erzeugenden Zahl befriedigt wird.

Kann nun das Residuum von $\zeta_k(s)$ anderweitig bestimmt werden, so erhält man offenbar einen Ausdruck für die Klassenzahl h. (Im Falle eines quadratischen Körpers ist dieses Verfahren im wesent-

---

377) Vgl. hierzu II B 7, Nr. 129, wo die Beziehungen zu der allgemeinen Theorie der Thetafunktionen behandelt werden.

378) *G. Lejeune-Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. und m. Zusätzen versehen von *R. Dedekind,* 4. Aufl. 1894, p. 610.

379) Die kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen Ideale, $N\mathfrak{a}$ ist die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$, $N\mathfrak{a}^s$ bedeutet $(N\mathfrak{a})^s$.

380) *H. Weber,* Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung, Gött. Nachr. 1896, p. 275—281; Lehrbuch der Algebra 2, 2. Aufl. 1899, p. 672—678, 712.

381) *E. Landau,* a. a. O. 28).

382) Wo nichts anderes gesagt wird, ist der Begriff „Idealklasse" im „weitesten Sinne" genommen, d. h. zwei Ideale sind zur gleichen Klasse gehörig, sobald ihr Quotient eine Körperzahl ist.

lichen mit dem *Dirichlet*schen — vgl. Nr. **40** — identisch.) Dies läßt sich aber nur in wenigen Fällen durchführen[383]), und zwar:

a) Für die Kreiskörper und deren Unterkörper (vgl. I C 4b[384])). Im Körper der ν^{ten} Einheitswurzeln ist

$$\zeta_k(s) = L_1(s)\, L_2(s) \ldots L_{\varphi(\nu)}(s) \cdot \prod_{p\,\nu} (1 - p^{-fs})^{-q},$$

wo alle $\varphi(\nu)$ L-Funktionen mod. ν (vgl. Nr. **29**) multipliziert werden, und f und q gewisse von ν und p abhängige positive ganze Zahlen sind. Die Formel für die Klassenzahl gibt hier also einen neuen Beweis für das Nichtverschwinden sämtlicher Reihen $L(1)$.[385])

b) Für die Klassenkörper der komplexen Multiplikation[386]).

c) Für solche Körper 4. Grades, die durch eine Zahl von der Form $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ mit rationalen a, b, c, sowie $c > 0$, $a \pm b\sqrt{c} < 0$ erzeugt werden. *Hecke*[387]) beweist unter Anwendung der von ihm untersuchten *Gauß*schen Summen in algebraischen Zahlkörpern einen Satz über gewisse Relativklassenzahlen, aus dem insbesondere ein Ausdruck für die Klassenzahl der genannten Körper folgt. Es zeigen sich hierbei eigentümliche Zusammenhänge mit tiefliegenden Fragen aus der Theorie der Thetafunktionen.

Die analytische Fortsetzung von $\zeta_k(s)$ über $\sigma = 1 - \frac{1}{n}$ hinaus konnte lange nur bei speziellen Körpern ausgeführt werden. Ein sehr bedeutender Fortschritt wurde nun von *Hecke*[388]) gemacht, indem es

383) *E. Landau,* Über eine Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe, Crelles J. 127 (1904), p. 167 bis 174 (vgl. auch a. a. O. 78)), zeigt, daß die *Dirichlet*sche Reihe für $\zeta_k(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)}$ im Punkte $s = 1$ konvergiert, so daß die Klassenzahl immer durch eine konvergente unendliche Reihe dargestellt werden kann.

384) Vgl. auch die neuere Darstellung von *R. Fueter,* Synthetische Zahlentheorie, Berlin u. Leipzig (Göschen) 1917.

385) *Dirichlet-Dedekind,* a. a. O. 378), p. 625.

386) Jedes Eingehen auf die Theorie der Klassenkörper mußte aus diesem Bericht ausgeschlossen werden. Vgl. hierzu I C 6.

387) *E. Hecke,* Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern, Gött. Nachr. 1921, p. 1—23; Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern, ibid. 1919, p. 265—278. Vgl. auch *L. J. Mordell,* On the reciprocity formula for the Gauss's sums in the quadratic field, Proc. London math. Soc. (2) 20 (1920), p. 289—296; *K. Reidemeister.* Über die Relativklassenzahl gewisser relativquadratischer Zahlkörper, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 27—48.

388) *E. Hecke,* Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 77—89; eine Anwendung der Entdeckung auf die Theorie der Klassenkörper gibt die Arbeit: Über eine neue Anwendung der Zetafunktionen auf die Arithmetik der Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 90—95.

ihm gelang, den zweiten *Riemann*schen Beweis für $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) zu verallgemeinern und dadurch nicht nur die Existenz von $\zeta_k(s)$ in der ganzen Ebene nachzuweisen, sondern auch eine der *Riemann*schen analoge Funktionalgleichung für $\zeta_k(s)$ aufzustellen und mit ihrer Hilfe die *Hadamard*schen Sätze über das Geschlecht und die Produktentwicklung der ganzen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ (vgl. Nr. **15**) zu verallgemeinern.[389]) Es läßt sich nämlich, wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben ist, die Summe[390])

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{j} \sim 1} \frac{1}{N\mathfrak{j}^s}, \tag{112}$$

die über alle Ideale $\mathfrak{j}$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}$ erstreckt ist, durch eine Thetareihe

$$\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) = \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})} e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{N\mathfrak{a}^2\,|d|}} \sum_{p=1}^{n} \tau_p |\mu^{(p)}|^2} \tag{113}$$

ausdrücken, wobei μ alle Zahlen von $\mathfrak{a}$ durchläuft, $\mu^{(1)}, \ldots \mu^{(n)}$ die konjugierten Zahlen (inkl. μ selbst), in bestimmter Reihenfolge wie in I C 4a, Nr. 7, geordnet, und diejenigen τ_p, welche konjugiert imaginären Körpern entsprechen, einander gleich sind. *Hecke* findet in der Tat durch sinnreiche Überlegungen

$$\Phi(s, \mathfrak{a}) = A^s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} (\Gamma(s))^{r_2}\, \zeta(s, \mathfrak{a}) \tag{114}$$

$$= \frac{2^{r_1-1} n R}{w} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_r \int_0^{\infty} u^{\frac{ns}{2}-1} \left(\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) - 1\right) du,$$

wo

$$A = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|d|},$$

$$\tau_p = u\, e^{2 \sum_{q=1}^{r} x_q \log |\varepsilon_q^{(p)}|}$$

gesetzt ist und $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten des Körpers bezeichnet. (Wie üblich ist $r = r_1 + r_2 - 1$.) Die Thetareihe (113) genügt aber der Funktionalgleichung

$$\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n}}\, \vartheta\left(\frac{1}{\tau_1} \cdots \frac{1}{\tau_n};\ \mathfrak{a}^{-1}\, \mathfrak{d}^{-1}\right),$$

---

389) Neuerdings wurde der *erste Riemann*sche Beweis von *C. Siegel* für $\zeta_k(s)$ verallgemeinert: Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion, Math. Ann. 85 (1922), p. 123—128.

390) Die Ausdrücke (112), (113) und (114) sind nicht von dem Ideal $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ abhängig.

wo $\mathfrak{d}$ das Grundideal von k ist (vgl I C 4a, Nr. 5); hieraus folgt

$$\Phi(s, \mathfrak{a}) - \frac{2^{r_1} R}{w\, s\,(s-1)} =$$

$$= \frac{2^{r_1-1} n R}{w} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d x_1 \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d x_r \int_{1}^{\infty} \Big[u^{\frac{n s}{2}} \left(\vartheta(\tau_1 \dots \tau_n;\, \mathfrak{a}) - 1\right) +$$

$$+ u^{\frac{n(1-s)}{2}} \left(\vartheta(\tau_1 \dots \tau_n;\, \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{d}^{-1}) - 1\right)\Big] \frac{du}{u},$$

was der Gleichung (26) von Nr. 14 entspricht. Da $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ gleichzeitig mit $\mathfrak{a}$ alle h Idealklassen durchläuft, folgt weiter:

$$Z(s) = s\,(1-s)\, A^s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} \left(\Gamma(s)\right)^{r_2} \zeta_k(s)$$

ist eine ganze Funktion, die sich bei Vertauschung von s mit $1-s$ nicht ändert. $\zeta_k(s)$ ist also, bis auf den Pol bei $s = 1$, in der ganzen Ebene regulär und besitzt die Funktionalgleichung

$$\zeta_k(1-s) = \left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^n |d|^{s-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{s\pi}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\sin\frac{s\pi}{2}\right)^{r_1} \left(\Gamma(s)\right)^n \zeta_k(s).$$

(Vgl. [24] Nr. **14**.) Der Punkt $s = 0$ ist Nullstelle r^{ter} Ordnung, $s = -2, -4, \dots$ Nullstellen $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $s = -1, -3, \dots$ Nullstellen r_2^{ter} Ordnung; außerdem gibt es unendlich viele Nullstellen ϱ, die sämtlich dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören, und es kann wie bei $\zeta(s)$ die Produktentwicklung

$$(s-1)\,\zeta_k(s) = a\, e^{b s} \frac{1}{s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} \left(\Gamma(s)\right)^{r_2}} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}$$

(vgl. [28], Nr. **15**) abgeleitet werden.

Landau[391]) gibt eine Zusammenfassung der Theorie von $\zeta_k(s)$ und zeigt dabei, daß alle ϱ dem *Innern* des „kritischen Streifens" angehören[392]), und daß sogar das Gebiet (vgl. Nr. **19**)

$$\sigma > 1 - \frac{k}{\log t}, \quad t > t_0$$

391) *E. Landau*, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig u. Berlin (Teubner) 1918.

392) *Landau*, a. a. O. 28), hat schon vor *Hecke*s Entdeckung gezeigt, daß keine Nullstelle auf $\sigma = 1$ liegt, und sogar daß $\left|\frac{\zeta_k'}{\zeta_k}\right| < c \log^9 t$ im Gebiete $\sigma > 1 - \frac{k}{\log^7 t}$, $t > t_0$ gilt, was für die Verallgemeinerung des Primzahlsatzes wichtig war (vgl. Nr. **42**). Vgl. hierzu auch *Landau*, Über die Wurzeln der Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 79 (1919), p. 388—401.

bei passender Wahl von k und t_0 von Nullstellen frei ist. Die Anzahl der ϱ im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t \leqq T$ ist nach *Landau*[391])

$$N(T) = \frac{n}{2\pi} T \log T + \frac{\log |d| - n - n \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).^{393)}$$

(Vgl. [30], Nr. **16**.) Ob bei der allgemeinen $\zeta_k(s)$ unendlich viele ϱ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen (vgl. Nr. **19**), ist bisher nicht entschieden.

Die Sätze über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden[394]) und über die Größenordnung von $\zeta(s)$ wurden zum Teil auch für $\zeta_k(s)$ verallgemeinert. Insbesondere ist über die μ-Funktion von $\zeta_k(s)$ (vgl. Nr. **18**) bekannt, daß $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > 1$ und $\mu(\sigma) = n\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)$ für $\sigma < 0$ ist[391]), während für $0 < \sigma < 1$ die μ-Kurve im Dreieck mit den Eckpunkten $\left(0, \frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1, 0)$ verläuft.

Bei Untersuchungen über die Verteilung der Primideale in den verschiedenen Idealklassen des Körpers, bzw. in den Idealklassen mod. $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal), treten gewisse Funktionen auf, die den L-Funktionen des rationalen Körpers entsprechen (vgl. Nr. **29** und für den quadratischen Körper Nr. **40**). Sie werden für $\sigma > 1$ durch die Gleichung

$$\zeta_k(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

definiert, wobei die idealtheoretische Funktion $\chi(\mathfrak{a})$ durch einen Charakter der betreffenden *Abel*schen Gruppe von Idealklassen in analoger Weise wie die zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ bei den L-Funktionen (vgl. Nr. **29**) bestimmt ist. Die analytische Fortsetzung wurde von *Landau*[370a]) bis zu $\sigma = 1 - \frac{1}{n}$, von *Hecke*[395]) über die ganze Ebene ausgeführt und die entsprechenden Funktionalgleichungen wurden von *Hecke*[395]) und *Landau*[396]) aufgestellt. Bei jedem vom Hauptcharakter verschiedenen χ ist $\zeta_k(s, \chi)$, bei dem Hauptcharakter aber $(s - 1) \cdot \zeta_k(s, \chi)$, eine ganze Funktion von Geschlechte Eins, die im Streifen

393) Einen Satz über den Mittelwert des Restgliedes in dieser Formel gibt *H. Cramér,* a. a. O. 186).

394) Vgl. *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 113).

395) *E. Hecke,* Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 299—318.

396) *E. Landau,* Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 52—154. Es werden hier auch andere Äquivalenzbegriffe, d. h. andere Definitionen des Begriffs „Idealklasse“ berücksichtigt.

$0 < \sigma < 1$ unendlich viele Nullstellen besitzt[397]), aber für $\sigma \geqq 1$ durchweg von Null verschieden ist.[398])

Um ein genaueres Studium der Verteilung der Primideale von k zu ermöglichen, führt *Hecke*[376]) eine Klasse *verallgemeinerter Zetafunktionen*

$$\zeta(s, \lambda) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\lambda(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

ein, wo die $\lambda(\mathfrak{a})$ gewisse der Multiplikationsregel $\lambda(\mathfrak{a})\,\lambda(\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ genügende „Größencharaktere" von $\mathfrak{a}$ sind, die von $n - 1$ „Grundcharakteren" abhängen. Durch die Angabe der Grundcharaktere und der Norm ist das Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt. Diese $\zeta(s, \lambda)$ lassen sich wie $\zeta_k(s)$ durch Thetareihen ausdrücken und besitzen auch ähnliche Funktionalgleichungen. Durch Kombination dieser Resultate mit einem Satz von *Weyl* (vgl. Nr. **39**) über diophantische Approximationen erhält *Hecke* neue Sätze über die Verteilung der Primideale und der Primzahlen in gewissen zerlegbaren Formen (vgl. Nr. **40**). — Endlich sei auch noch erwähnt, daß *Hecke*[399]) neuerdings verschiedene einem Zahlkörper zugeordnete analytische Funktionen *mehrerer* Variablen eingeführt hat, wobei die $\zeta(s, \lambda)$ als Hilfsmittel dienen.

42. Die Verteilung der Ideale und der Primideale. Es war für die Verallgemeinerung des Primzahlsatzes wesentlich, daß die von *Landau* eingeführten Methoden (vgl. Nr. **25**) nur das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Nähe von $\sigma = 1$ benutzten. Ohne die Existenz der *Dedekind*schen $\zeta_k(s)$ in der ganzen Ebene — die damals nicht bekannt war — vorauszusetzen, gelang es ihm nämlich, den sog. *Primidealsatz*[400]) zu beweisen: Für jeden Körper k vom Grade n ist die Anzahl $\pi_k(x)$ der Primideale mit Norm $\leqq x$ asymptotisch gleich $Li(x)$. Unter Benutzung der Gleichung

$$\log \zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{1}{m\, N\mathfrak{p}^{ms}} \qquad (\sigma > 1)$$

397) Außerdem gibt es nur „triviale" Nullstellen bei $s = 0$ und auf der negativen reellen Achse sowie — im Falle eines uneigentlichen Charakters — auf der imaginären Achse.

398) Vgl. *E. Hecke,* a. a. O. 395); *E. Landau,* a. a. O. 370a) und 396), Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 152—162.

399) *E. Hecke*, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, I. Teil Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 102—126.

400) *E. Landau,* Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), p. 645—670.

ergibt sich dies genau wie bei dem Primzahlsatz. Es gilt sogar nach *Landau*[401])

$$\pi_k(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$$

$$\vartheta_k(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} = x + O\left(x e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$$

mit absolut konstantem α, was jedoch erst nach der Entdeckung der Fortsetzbarkeit von $\zeta_k(s)$ bewiesen werden konnte. Hierin ist als Spezialfall die Abschätzung von $\pi(x)$ (vgl. Nr. 27) enthalten. Für die Primideale einer Idealklasse (bzw. einer Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal ist) gelten entsprechende Gleichungen[402]), und zwar gilt dies auch bei engerer Auffassung des Klassenbegriffs. Dies enthält wiederum als Spezialfall *Dirichlet*s Satz von der arithmetischen Reihe (vgl. Nr. **30**). Die *Littlewood*schen Beziehungen (60) von Nr. **27** wurden von *Landau*[396]) für einen beliebigen Körper k und für eine beliebige Idealklasse von k verallgemeinert. Insbesondere ist also

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\pi_k(x) - Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x} < 0 < \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi_k(x) - Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x}.$$

Bei dem Beweis dieses Satzes dient als Hilfsmittel die Verallgemeinerung der *Riemann-v. Mangoldt*schen Primzahlformel[403]); über die Konvergenzeigenschaften von $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ gibt es auch hier ähnliche Sätze wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **28**).

Wird das Residuum von $\zeta_k(s)$ für $s = 1$ durch $h\lambda$ bezeichnet, so gilt nach *Landau*[404]) für die Anzahl $H(x, K)$ der Ideale mit Norm $\leq x$, die einer Klasse K von k angehören,

$$H(x, K) = \lambda x + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}}\right)$$

und für die Anzahl $H(x)$ aller Ideale des Körpers mit Norm $\leq x$

$$H(x) = h\lambda x + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}}\right).$$

401) *E. Landau,* a. a. O. 391). Die in der vorigen Fußnote erwähnte Arbeit gibt eine weniger gute Abschätzung.

402) *E. Hecke,* a. a. O. 395); *E. Landau,* a. a. O. 227), 370a und 396).

403) *E. Landau,* a. a. O. 391) und 396). Für einige Anwendungen einer analogen Formel vgl. *H. Cramér,* a. a. O. 186).

404) *E. Landau,* a. a. O. 289b), 391) und 396).

Andererseits zeigt *Walfisz*[297]), der die von *Hardy* bei den Teilerproblemen (vgl. Nr. **34**) angewandte Methode benutzt,

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{H(x) - h\lambda x}{x^{\frac{n-1}{2n}}} < 0 < \limsup_{x \to \infty} \frac{H(x) - h\lambda x}{x^{\frac{n-1}{2n}}}.$$

In diesen Beziehungen sind als Spezialfälle verschiedene der in Nr. **35** erwähnten Resultate bei den Kreis- und Ellipsoidproblemen enthalten.[405]) *Walfisz*[297]) hat auch eine explizite Formel für $H(x)$ aufgestellt, die als Spezialfälle die entsprechenden Formeln bei jenen Problemen enthält.

Setzt man, analog wie bei $\zeta(s)$, für $\sigma > 1$

$$\frac{1}{\zeta_k(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

so läßt sich über die idealtheoretische Funktion $\mu(\mathfrak{a})$ z. B.

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \mu(\mathfrak{a}) = o(x), \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = 0,$$

mit entsprechenden schärferen Abschätzungen, beweisen.[406]) Auch die Zusammenhangssätze der rationalen Zahlentheorie (vgl. Nr. **33**) lassen sich für einen beliebigen Körper k verallgemeinern[407]), sowie auch verschiedene andere der in den Nummern **32**—**37** erwähnten Sätze über zahlentheoretische Funktionen.[408])

405) Die entsprechenden oberen Abschätzungen waren überhaupt für quadratische Körper schon früher bekannt. Vgl. z. B. *E. Landau*, a. a. O. 284); *A. Hammerstein*, a. a. O. 200).

406) *E. Landau*, Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$, Sitzungsber. Akad. Wien **112** (1903), Abt. 2a, p. 537—570.

407) *E. Landau*, a. a. O. 21); *A. Axer*, a. a. O. 275).

408) Vgl. z. B. *E. Landau*, a. a. O. 300) und 370a); *A. Axer*, Przyczynek do charakterystyki funkcyi idealowej $\varphi(\mathfrak{x})$ [Sur la fonction $\varphi(\mathfrak{x})$ dans la théorie des idéaux], Prace Math.-Fiz. 21 (1910), p. 37—41.

(Abgeschlossen im Mai 1922.)



